3.2 Тема. Распределение редких событий

Цель. Знакомство с законом и формулой Пуассона.

Характер биномиальной кривой определяется двумя величинами: числом испытаний и вероятностью ожидаемого результата. При p=0,5 биномиальная кривая строго симметрична и по мере числа испытаний приобретает более плавный ход на всем протяжении. Если же $p \neq q$, биномиальная кривая становится асимметричной, особенно при увеличении разницы между p и q. Когда вероятность ожидаемого события исчисляется сотыми и тысячными долями единицы, распределение частоты такого редкого события в n независимых испытаний оказывается крайне асимметричным. Распределение частоты таких редких событий описывается формулой Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{a^m}{m!} \times e^{-a} = \frac{a^m}{m! e^a}, \quad (32)$$

где m – частота ожидаемого события в n независимых испытаний; $a \cong np$ – наивероятнейшая частота редкого события; e=2,7183… - основание натуральных логарифмов; m! – факториал частоты, или произведение натуральных чисел 1·2·3… m.

Пример. Для a=2 вероятность того, что событие A в данных случаях не осуществится, будет равна

$$P_0 = \frac{2^0}{0! e^2} = \frac{1}{(2.7183)^2} = \frac{1}{7.389} = 0.1353.$$

Значения вероятности $P_n(m)$ для любых значений a от 0 до n помещены в таблице 1 приложений.

Чтобы формула Пуассона выражала не вероятности, а ожидаемые абсолютные частоты (p^1) редкого события, ей придается следующее выражение:

$$P^1 = n \frac{\overline{X}^m}{m!} \times e^{-\bar{x}} \quad (33)$$

где p^1 - теоретические ординаты кривой распределения Пуассона или ожидаемое число случаев редкого события в каждом отдельно взятом классе испытания – 0, 1, 2, 3, 4 и т.д.; n – число испытаний; $\overline{x}$ - среднее число фактически наблюдаемых случаев (взятое вместо a); объяснения остальных символов те же, что в формуле (30).

По закону Пуассона распределяются многие случайные события, с которыми приходится встречаться в микробиологии, радиобиологии и в других разделах современной биологии.

Задание 1. При проверке повреждаемости яровой пшеницы личинками жука щелкуна были получены следующие данные:
Количество обнаруженных личиной (x_i)… 0 1 2 3 4 5
Число обследованных растений (p_i)……..174 110 19 9 3 2

Следует ли это распределение закону Пуассона?

Задание 2. По данным Варденбурга, острота зрения у 105 монозиготных близнецов характеризуется следующим образом:
Разница в диоптриях (x_i)..0,25 0,50 0,75 1,00 1,25 1,50 1,75
Число случаев (p_i)…….. 44 26 25 8 11 1 0

Следует ли это распределение закону Пуассона?

Контрольные вопросы.

1. Приведите формулу Пуассона.
2. Приведите примеры распределения по закону Пуассона.