2.6 Тема. Другие степенные средние

Цель. Знакомство с методами вычисления основных биометрических показателей количественных признаков.

В некоторых случаях при вычислении средней величины используют не абсолютные значения варьирующего признака, а обратные числа отдельных вариант. Получаемая при этом характеристика называется средней гармонической и обозначается символом Н. Средняя гармоническая, как и другие средние, может быть простой и взвешенной. Простая средняя гармоническая представляет отношение объема выборки к сумме обратных значений признака:

$$H = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}, \quad (12)$$

взвешенная средняя гармоническая выражается следующей формулой:

$$H = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i} \times p_i}, \quad (13)$$

где x_i - варианты признака;

n – число вариант;

p_i - частоты.

Средняя гармоническая применима при вычислении среднего уровня признака, характеризующего скорость какого-либо процесса (средняя скорость бега, скорость молокоотдачи при доении), а также в случае, если признак выражен индексом (число шерстинок на 1 мм^2 поверхности кожи).

Величина Н всегда меньше величины $\overline{X}$.

Пример. Пять доярок в течение часа ручным способом надоили следующее количество молока: первая – 10 л, вторая – 20, третья – 25, четвертая – 30 и пятая – 20 л, всего 105 л. Сколько времени в среднем затрачивает доярка на выдаивание 1 л молока?

Решая эту задачу с помощью средней арифметической, получаем $\overline{X}$ =105/5=21 л. Следовательно, на выдаивание 1 л молока затрачивается в среднем 60:21=2,86 мин. Однако этот расчет недостаточно точен, так как фактически на выдаивание 5 л молока затрачено в среднем 60/10+60/20+60/25+60/30+60/20=16,4 мин. Следовательно на выдаивание 1 л молока доярка затрачивает в среднем 16,4:5=3,28 мин (а не 2,86 мин, как получилось выше).

Следовательно, за 1 ч доярка выдаивает в среднем не 21 л молока, а только 18,31 л, что видно из следующего расчета: H=5/(1/10+1/20+1/25+1/30+1/20)=5/0,273=18,31 л. На выдаивание 1 л молока доярка затрачивает в среднем 60/18,31=3,23 мин. В данном случае этот показатель является более точным, чем средняя арифметическая.

При выражении признаком мерами площади (например, диаметр корзинок подсолнечника, с которым связана урожайность этой культуры; величина листовых пластинок, от которой зависит продуктивность фотосинтеза, или размеры колоний микроорганизмов, продуцирующих те или иные активные вещества, и т.п. признаки) более точной характеристикой будет средняя квадратическая, обозначаемая символом S. Эта величина равняется корню квадратному из суммы квадратов вариант, отнесенной к их общему числу в данной выборке, т.е.

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2_i}{n}}, \quad (14)$$

или при повторяемости отдельных вариант:

$$S = \sqrt{\frac{\sum p_i x^2_i}{n}}. \quad (15)$$

Пример. При измерении диаметра у десяти корзинов подсолнечника (см) полученные результаты распределились следующим образом:

Диаметр корзинок (x_i) … 8 11 13 15 16 17

Число случаев (p_i) ………1 1 2 3 2 1

Определим средний размер этого признака. Предварительно рассчитаем $\sum p_i x^2_i = 1999$, откуда S=14,1 см. Если вычислить среднюю арифметическую, то она оказывается меньше средней квадратической: $\overline{x}$ =13,9 см.

Средняя кубическая – более точная характеристика объемных признаков. Она обозначается символом К и равняется корню кубическому из суммы кубов вариант, деленной на их число, т.е.

$$K = \sqrt[3]{\frac{\sum x^3_i}{n}}, \quad (16)$$

или с учетом повторяемости отдельных вариант:

$$K = \sqrt[3]{\frac{\sum p_i x^3_i}{n_i}}. \quad (17)$$

Пример. При измерении диаметра (см) наугад отобранных 18 куриных яиц (бралась полусумма большого и малого диаметра яиц) результаты распределились следующим образом:

Диаметр яиц (x_i) ……..4,7 4,8 5,0 5,4 5,6 6,0

Число случаев (p_i)……2 4 6 3 2 1

Определим средний размер (объем) яиц по их диаметрам. Предварительно найдем $\sum x^3_i = 2439{,}7$, откуда К=5,1 см.

Средняя геометрическая – более точная характеристика при определении средних прибавок или при увеличении линейных размеров тела, прироста численности популяции за определенный промежуток времени. Она обозначается символом G и равна корню n-й степени из произведений членов ряда:

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 ... x_n}\ . \quad (18)$$

Например, средняя геометрическая чисел 5, 8, 25 равна $G = \sqrt[3]{5 \times 8 \times 25} = \sqrt[3]{1000} = 10.$

Обычно средняя геометрическая вычисляется с помощью десятичных логарифмов по формуле:

$$\lg G = (\lg x_1 + \lg x_2 + ... + \lg x_n) \div n\ , \quad (19)$$

то есть логарифм средней геометрической равен средней арифметической из логарифмов всех членов ряда. При этом отклонения логарифмов отдельных вариант от логарифма средней геометрической в сумме равны нулю (основное свойство средних величин).

Пример. По данным Дональдсона, живая масса подопытных мышей изменяется с возрастом (таблица 2.6.1).

Таблица 2.6.1

Возраст мышей, недели	Живая масса, г (x_i)	Абсолютные недельные прибавки массы, г	Логарифм прибавок массы мышей
1	10	-	-
2	15	5	0,69897
3	20	5	0,69897
4	27	7	0,84510
5	35	8	0,90309
6	46	11	1,04139
7	58	12	1,07918
8	72	14	1,14613
9	87	15	1,17609

Сумма - 77 7,58892

Подставляя известные величины в формулу, определяем среднюю геометрическую недельных абсолютных прибавок массы мышей за первые девять недель их жизни: lgG=7,58892/8=0,94861, откуда G=8,9 г. Средняя арифметическая из абсолютных прибавок массы оказывается больше средней геометрической: $\overline{x}$=77/8=9,6 г.

Средняя геометрическая – более точный показатель, чем средняя арифметическая, когда приходится характеризовать изменения признаков во времени. В этом нетрудно убедиться, имея в виду тот факт, что последовательное умножение показателя относительного прироста величины признака (G) начиная с начальной величины (x_0) равно его конечной величине (x_n). Этот прием служит для проверки точности расчета средней геометрической относительных прибавок величины признака за данный период времени.

Как правило, средняя арифметическая незначительно отличается от средней геометрической и в качестве приближенной характеристики темпов динамики пользуются и средней арифметической, вычисление которой связано с меньшей затратой труда.

Одним из условий правильного применения средней геометрической является наличие геометрической прогрессии, заложенной в самой динамике явления. Эта особенность несколько ограничивает области применения этого ценного показателя.

Задание 1. Определите средний диаметр пяти зигот до начала их дробления, если известен диаметр каждого из них (мкм): 60, 70, 58, 65, 75.

Задание 2. При определении плотности колосьев ржи было отобрано 20 растений, в колосьях которых подсчитывалось число зерен и измерялась длина каждого колоса в сантиметрах. Затем отнесением числа зерен к длине колосьев определялась плотность. Результаты распределились следующим образом:

Длина колосьев (округленно)….8 9 10 11 12

Число зерен в колосе…………..36 38 40 41 42

Число случаев (частота)………. 2 5 10 2 1

Плотность колосьев………… 4,5 4,2 4,0 3,7 3,5

Определите среднюю плотность колосьев этой выборки.

Задание 3. Определите среднюю скорость молокоотдачи у коровы, если за 3 мин выдоено 6 кг молока, в том числе за первую минуту – 2 кг, за вторую – 3 кг, за третью – 1 кг.

Задание 4. 19 колони й микроорганизмов распределились по величине их диаметра (мм) следующим образом:

Диаметр колоний (x_i) ….. 10 15 20 25 30

Число колоний (p_i) ……. 2 4 5 5 3

Определите средний диаметр колоний и показатели вариаций.

Контрольные вопросы.

1. Перечислите средние величины, дайте им краткую характеристику.
2. Как вычисляется средняя геометрическая?
3. Как вычисляется средняя квадратическая?
4. Как вычисляется средняя кубическая?