

2.6 Басқа дәрежедегі ауытқулар

Мақсаты. Сандық белгілердің негізгі биометриялық көрсеткіштерін есептеу әдістерімен танысу.

Кейбір жағдайларда орташа шамаларды есептегенде өзгермелі белгінің абсолютті мағынасы емес, жеке варианттардың қайтымды сандары қолданылады. Осыдан алынған сипаттама орташа гармониялық деп аталады және H белгісімен белгіленеді. Басқада орташалар сияқты гармониялық орташада қарапайым және өлшенген болуы мүмкін. Іріктеу көлемінің белгі мағынасының қайтымды қосындысына қатынасын қарапайым орташа гармониялық көрсетеді:

$$H = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}, \quad (12)$$

өлшенген орташа гармониялық мына формуламен анықталады:

$$H = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i} \times p_i}, \quad (13)$$

мұнда x_i - белгі вариантасы;

n –варианта саны;

p_i -жиіліктер.

Орташа гармониялық - белгінің орташа шамасын есептеуде қолданылады, ол қандай да бір үрдістің жылдамдығымен (жүгірістің орташа жылдамдығы, сауу кезіндегі сүт беру жылдамдығы), сонымен қатар белгінің индекспен анықталған жағдайында (тері бетіндегі талшықтарының саны 1 мм^2) сипатталады.

H шамасы әрқашан \bar{x} шамасынан кіші.

Мысал. Бес сауыншы бір сағаттың ішінде қолмен мынадай мөлшерде сүт сауды: біріншісі -10 л, екіншісі – 20 л, үшіншісі – 25 л, төртіншісі – 30 және бесіншісі -20 л, барлығы 105 л. 1 л сүт сауу үшін бір сауыншы қанша уақыт жұмсайды ?

Осы есепті орташа арифметикалық көмегімен шешіп, $\bar{x} = 105/5 = 21$ литр аламыз.

Олай болса, 1 л сүтті саууда орташа $60:21 = 2,86$ мин.жұмсалады. Бірақта бұл есептеу жеткілікті анық емес, себебі нақты 5 л сүтті саууда орташа $60/10 + 60/20 + 60/25 + 60/30 + 60/20 = 16,4$ мин. жұмсалды. Ендеше 1 л сүтті сауарда сауыншы орташа мөлшермен $16,4:5 = 3,28$ мин жұмсайды (жоғарыда алынғандай 2,86 мин емес).

Сондықтан, 1 с сауыншы орташа мөлшермен 21 л сүт емес, тек қана 18,31л сүт сауады, яғни оны мына есептеулерден көруге болады: $H = 5 / (1/10 + 1/20 + 1/25 + 1/30 + 1/20) = 5 / 0,273 = 18,31$ л. 1 л сүтті саууда сауыншы

орташа есеппен $60/18,31=3,23$ мин. жұмсайды. Берілген оқиғада осы көрсеткіш орташа арифметикалыққа қарағанда нақты дәл келетін болып табылады.

Аудан өлшемдері белгілерінің айтылуында (мысалы, күнбағыс себеттерінің диаметрі, осы өсімдіктің өнімімен байланысты; жапырақ табақшаларының шамасы, фотосинтез өнімділігіне байланысты, немесе колония микроағзалардың өлшемдерімен, сол және басқада белсенді заттардың өндірілуімен байланысады) ең нақтысы болып S символмен белгіленетін орташа квадраттық сипатталады. Бұл шама варианта квадраты қосындысынан, осы іріктеулердегі олардың жалпы санына лайықты түбір асты квадратына тең болады, яғни:

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}, \quad (14)$$

немесе жеке варианттардың қайталануында:

$$s = \sqrt{\frac{\sum p_i x_i^2}{n}} \quad (15)$$

Мысал. 10 күнбағыс себеттерінің диаметрін өлшегенде (см) алынған нәтижелелер келесідей жағдайда болды:

| | | | | | | |
|---------------------------------|---|----|----|----|----|----|
| Себеттер диаметрі (x_i) ... | 8 | 11 | 13 | 15 | 16 | 17 |
| Оқиға саны (p_i) | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 |

Осы белгілердің орташа өлшемін анықтайық. Алдынала есептесек $\sum p_i x_i^2 = 1999$, яғни $S=14,1$ см. Егерде орташа арифметикалықты есептесек, онда ол орташа квадраттықтан аз болып шығады: $\bar{x} = 13,9$ см.

Орташа кубтық – салмақты белгілердің нақты сипаттамасы. Ол K символмен белгіленіп және варианта кубының қосындысынан, олардың санына бөлінген куб түбіріне тең болады, яғни:

$$K = \sqrt[3]{\frac{\sum x_i^3}{n}}, \quad (16)$$

немесе жеке варианттардың қайталануын есепке ала отырып:

$$K = \sqrt[3]{\frac{\sum p_i x_i^3}{n_i}} \quad (17)$$

Мысал. Кездейсоқ таңдалған 18 тауық жұмыртқасының диаметрін (см) өлшегенде (жұмыртқаның үлкен және кіші диаметрінің жартылай қосындысы алынды) төмендегідей нәтижелер алынды:

| | | | | | | |
|-----------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Жұмыртқа диаметрі (x_i) | 4,7 | 4,8 | 5,0 | 5,4 | 5,6 | 6,0 |
| Оқиға саны (p_i) | 2 | 4 | 6 | 3 | 2 | 1 |

Жұмыртқаның орташа өлшемін (көлемін) олардың диаметрі бойынша анықтаймыз. Алдынала $\sum x^3_i = 2439,7$, табамыз, яғни $K=5,1$ см.

Орташа геометриялық – дене өлшемінің сызықтық өсуінің артуын немесе қосудың орташасын, белгілі уақыт аралығындағы популяция санының өсуін анықтауда ең нақты сипаттама болып табылады.

Ол G символымен белгіленіп және n -дәрежесіндегі қатар мүшелерінің туындыларының түбіріне тең болады:

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n} . \quad (18)$$

Мысалы, орташа геометриялық сандар 5, 8, 25 тең

$$G = \sqrt[3]{5 \times 8 \times 25} = \sqrt[3]{1000} = 10.$$

Әдетте орташа геометриялықты ондық логарифм формуласының көмегімен есептейді:

$$\lg G = (\lg x_1 + \lg x_2 + \dots + \lg x_n) \div n , \quad (19)$$

яғни орташа геометриялық логарифмі орташа арифметикалықтың барлық қатарындағы логарифм мүшелеріне тең. Осыдан орташа геометриялық логарифмінің қосындысынан жеке варианттар логарифмдерінің ауытқуы нольге тең болады (орташа шаманың негізгі қасиеті).

Мысал. Дональдсон мәліметтері бойынша, тәжірибеге алынатын тышқандардың тірі салмағы жас ерекшелігіне байланысты өзгеріп отырады (кесте 2.6.1).

Кесте 2.6.1

| Тышқан жасы, апталар | Тірі салмағы, г (x_i) | Абсолютті апталық салмақ өсімі, г | Тышқан салмағының логарифмдік өсімі |
|----------------------|---------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 10 | - | - |
| 2 | 15 | 5 | 0,69897 |
| 3 | 20 | 5 | 0,69897 |
| 4 | 27 | 7 | 0,84510 |
| 5 | 35 | 8 | 0,90309 |
| 6 | 46 | 11 | 1,04139 |
| 7 | 58 | 12 | 1,07918 |
| 8 | 72 | 14 | 1,14613 |
| 9 | 87 | 15 | 1,17609 |

Қосынды

-

77

7,58892

Белгілі шамаларды формулаға қоя отырып, тышқандар өмірінің алғашқы тоғыз аптасындағы абсолютті апталық салмақ өсімінің орташа геометриялығын анықтаймыз: $\lg G = 7,58892/8 = 0,94861$, мұндағы $G = 8,9$ г. Орташа арифметикалық абсолютті салмақ өсімінен орташа геометриялыққа қарағанда көп: $\bar{x} = 77/8 = 9,6$ г.

Орташа геометриялық – уақыт ішіндегі белгілердің өзгеруін сипаттауда орташа арифметикалыққа қарағанда нақты көрсеткіш.

Бұған сену қиын емес, сол фактыны ескере отырып (G) белгісінің өсу шамасының айтарлықтай біртіндеп көбеюі алғашқы (x_0) шамасынан бастап оның (x_n) соңғы шамасына тең. Бұл тәсілді берілген уақыт аралығындағы белгілер шамасының айтарлықтай өсіндісінің орташа геометриялық есебінің нақты дәлелін тексеруде қолданылады.

Қағида бойынша, орташа арифметикалықтың орташа геометриялықтан айырмашылығы көп емес және орташа арифметикалық динамикалық темптің жуықтау сипаты ретінде қолданылып, есептеудің аз еңбек жұмсалыуымен байланысты.

Орташа геометриялықты дұрыс қолдану ережелерінің ең маңызды шарттарының бірі динамиканың өзінде қаланған геометриялық прогрессияның бар болуы. Бұл ерекшелік осы бағалы көрсеткішті қолдану аймағын біраз шектейді.

Тапсырма 1. Бес зиготаның бөлінуі басталғанға дейінгі орташа диаметрін анықтаңыз, егер де олардың әрбіреуінің диаметрі белгілі болса (мкм): 60, 70, 58, 65, 75.

Тапсырма 2. Қара бидай масағының тығыздығын анықтауда 20 өсімдік таңдап алынып, масағындағы дәннің саны саналып және әрбір масақ ұзындығы сантиметрмен өлшенді. Сосын дәннің санын масақ ұзындығына арақатысты тығыздылығы анықталды. Нәтижелері келесідей болып шықты:

| | | | | | |
|----------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Масақ ұзындығы (жуық шамада).... | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Масақтағы дән саны | 36 | 38 | 40 | 41 | 42 |
| Оқиға саны (жиілік) | 2 | 5 | 10 | 2 | 1 |
| Масақ тығыздығы | 4,5 | 4,2 | 4,0 | 3,7 | 3,5 |

Осы іріктеудегі масақтың орташа тығыздығын анықтаңыз.

Тапсырма 3. Сиырдың сүт беру жылдамдығының орташасын анықтаңыз, егерде 3 мин 6 кг сүт сауылса, соның ішінде бірінші минутында – 2 кг, екінші минутында – 3 кг, үшіншіде – 1 кг.

Тапсырма 4. Микроағзалардың 19 колониясының диаметрі олардың шамасына қарай келесідей болды:

| | | | | | |
|----------------------------------|----|----|----|----|----|
| Колония диаметрі (x_i) | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| Колония саны (p_i) | 2 | 4 | 5 | 5 | 3 |

Колонияның орташа диаметрін және вариация көрсеткішін анықтаңыз.

Бақылау сұрақтары.

1. Орташа шамаларды атап, оларға қысқаша сипаттама беріңіз.
2. Орташа геометриялық қалай есептелінеді?
3. Орташа квадраттық қалай есептелінеді?
4. Орташа кубтық қалай есептелінеді?