2.1.3 Есептерді шығару мысалдары

1 мысал

$\varphi = 2 \cdot r^2 - 4$ потенциалы берілген, мұндағы r- цилиндрлік координата. Бұл өрісті құрастыратын зарядтың көлемдік тығыздығын анықтаңыз.

Шешуі:

Берілген φ (r,α,z) кеңістігіндегі потенциалдың үлестіру заңы бойынша еркін зарядтардың үлестіруін анықтау (Пуассон теңдеуінің көмегімен). Пуассон теңдеуін жазамыз (12)

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

біздің жағдайда өріс r-дан тәуелді, сондықтан теңдеуді цилиндрлік координаттар жүйесінде r координаттары үшін жазамыз

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (18)$$

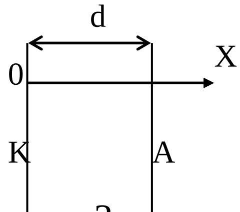
оны дифференциалдай отырып, зарядтың көлемдік тығыздығы үшін мәнін анықтаймыз

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r4r) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \frac{8r}{r} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \rho = -8\varepsilon_0 .$$

Жауабы: $\rho = -8\varepsilon_0$.

2 мысал

К жазық катодтан А жазық анод бағытында электрондар ұшып шығады (1-сурет). Электродтар арасындағы қашықтық олардың өлшемдерінен көп есе аз. Электродтар арасындағы электр өрісінің потенциалы $\varphi = kx^{4/3}$ заңы бойынша өзгереді. Мұндағы k – const. Электродтартағы және электродтар аралығындағы облыста зарядтардың үлестіруін анықтаңыз.



1-сурет

Шешуі:

Электродтар аралығындағы облыста зарядтардың көлемдік тығыздығының үлестіруі қандай? Бұл тізбек үшін қандай теңдеуді қолдану қажет?

Мұнда сонымен қатар Пуассон теңдеуін қолдануға болады (12)

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Есеп шартынан өрістің тек қана X координатынан тәуелді екендігін көруге болады (аймақтық эффектілерді ескермеуге болады). Сондықтан

$$\rho(x) = -\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{4}{9} \kappa \varepsilon x^{-2/3} \tag{19}$$

аламыз.

Анодтағы және катодтағы зарядтардың беттік тығыздығын анықтаймыз. Ол үшін металл-диэлектрик бөлімінің шекаралары үшін шекаралық шарттарды пайдалану қажет.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\xi}{\varepsilon} \tag{20}$$

(нормаль бағытының дұрыс таңдалуына назар аударыңыз). Біздің жағдайда катодтың нормалі X осі болады. Сондықтан катодтағы зарядтың беттік тығыздығы

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{\xi}{\varepsilon},$$

$$\xi_{\kappa} = -\varepsilon \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{4}{3} \kappa \varepsilon x^{1/3}\Big|_{x=0} = 0$$

болады.

Сәйкесінше анодқа нормаль X осіне қарама-қарсы бағытында орналасқан. Сондықтан анод үшін

$$\xi_a = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}\bigg|_{x=d} = \frac{4}{3}\kappa\varepsilon d^{1/3} \qquad (21)$$

Электрондардың катодтан анодқа қарай қозғалысы токтың пайда болуына әкеледі. Кирхгофтың бірінші заңы бойынша катодқа және анодқа параллель жазықтықтарының кез-келген қимасында осы токтың мәні бірдей болуы керек, сәйкесінше j токтың тығыздығы өзгеріссіз болуы қажет, ал бұл жағдайда ол токтың тасымалдау тығыздығына әкеледі

$$\vec{j} = \rho\bar{v} = const \qquad (22)$$

мұндағы $\boldsymbol{v}$ – зарядтың қозғалыс жылдамдығы.

Осыдан

$$\rho \sim \frac{1}{v} \qquad (23)$$

Катодтан ыршып шыққан электрон нолдік жылдамдыққа жақын **v** жылдамдыққа ие. Электрон үдетіліп катодтан алыстауына қарай v жоғарлайды және ρ үзіліссіз төмендейді. Өйткені энергия

$$W = \frac{mv^2}{2} = qU$$

онда

$$v \sim \sqrt{\varphi} \qquad (24)$$

және

$$\rho \sim \varphi^{-1/2}$$

Берілген есептен жазық диодтағы ток пен кернеуді байланыстыратын 3/2 дәреже заңы шығатындығын көреміз а) $\dfrac{mv^2}{2} = e\varphi, \quad v = \sqrt{\dfrac{2e\varphi}{m}};$

б) $j = \rho v, \qquad \rho = -\dfrac{4}{9}\kappa\varepsilon x^{-2/3} = -\dfrac{4}{9}\varepsilon x^{-2}\varphi;$

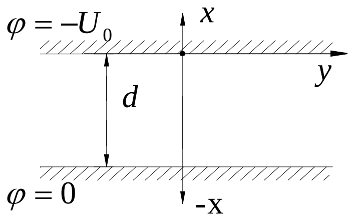
в) $i = \rho v S = \sqrt{\dfrac{2e\varphi}{m}} \cdot \left(-\dfrac{4}{9}\varepsilon x^{-2}\varphi\right) S.$

$x = d$ ойлай, демек

$$i = -\frac{4}{9}\frac{\varepsilon}{d^2} S \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot u^{3/2} = \alpha u^{3/2}$$

3 мысал

2-суретте бейнелген жазық конденсатор үшін потециал мәнін анықтаңыз.



2-сурет

Шешуі:

Жазық конденсатордың ішіндегі өріс декарттық координаттар жүйесінде Лаплас теңдеуімен суреттеледі және тек қана Х координатына функция болып табылады

$$\nabla^2\varphi = 0, \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$$

екі рет интегралдап, конденсатордың ішіндегі потенциал үшін мәнін анықтаймыз

$$\varphi = C_1 x + C_2 \tag{25}$$

Шекаралық шарттарын қанағаттандырайық. Егер х=0 болса (конденсатордың жоғарғы пластинасында) потенциал $\varphi = \varphi_2 = -U_0$. $C_2 = -U_0$ аламыз.Онда (25), келесі түрде болады

$$\varphi = C_1x\text{-}U \qquad (26)$$

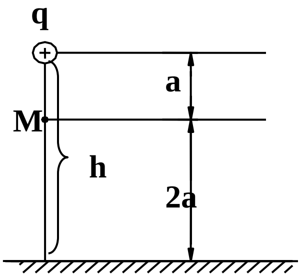
Егер $X = d$, $\varphi = 0$, онда (26) - қойып $0 = - C_1$, d -U_0 -ден $C1$-анықтаймыз $C1 = + U_0/d$. Олай болса, φ үшін соңғы нәтиже

$$\varphi = -\frac{U_0 x}{d} - U_0 .$$

Жауабы: $\varphi = -\frac{U_0}{d} \cdot x - U_0$.

4 мысал

Идеал өткізгіш жазықтықтың үстінде h биіктікте орналасқан q нүктелік заряды тудыратын, М нүктесіндегі φ потенциалының мәнін анықтаңыз (3-сурет).



3-сурет

Шешуі:

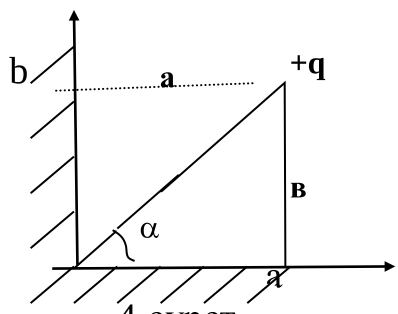
Айналық көрініс әдісін және суперпозиция әдісін қолдана отырып, М нүктесіндегі потенциал үшін мәнін анықтаймыз

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon\, a} - \frac{q}{4\pi\varepsilon\, 5a} = \frac{4q}{20\pi\varepsilon\, a} = \frac{q}{5\pi\varepsilon\, a}$$

Жауабы: $\varphi = \frac{q}{5 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot a}$.

5 мысал

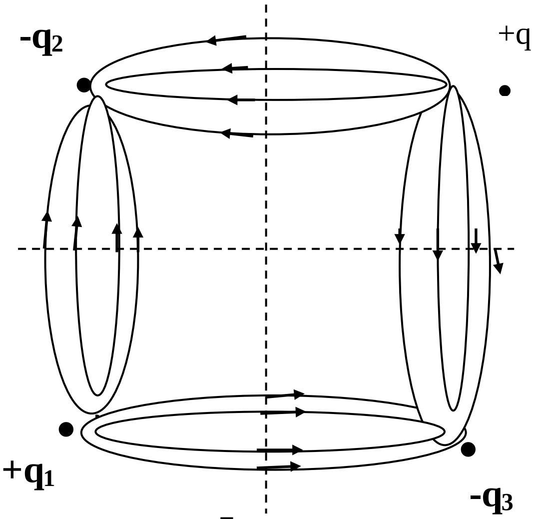
Өзара тік бұрыш жасайтын, екі өткізгіштен a = 4 см және b = 3 см қашықтықта орналасқан q нүктелік зарядқа әсер ететін күшті анықтау (4-сурет).



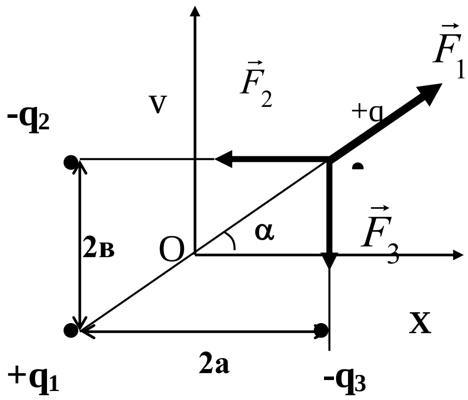
4-сурет

Шешуі:

Айналық көрініс әдісін қолданамыз. +q заряды өткізгіш жазықтықтармен көршілес болғандықтан, онда 5-суретте көрсетілген берілгеннің айналық көрінісі болып табылатын қосымша 1(+q), 2 (-q), 3 (-q) зарядтарды іріктеуге болады. Үш эквивалентті беттен (6-сурет) *q* зарядқа әсер ететін күшті (күштің бағыты плюстан минусқа бағытталған) анықтаймыз. Суперпозиция принципіне сәйкес зарядқа 3 күш әсер әсер етеді.



5-сурет



6-сурет

бөлігінің үшеуінің қосындысынан құралады

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$$

мұндағы

$$\vec{F}_i = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r_i^2} \text{ - Кулон заңы} \qquad (27)$$

Заряд арасындағы r_1, r_2, r_3 ара қашықтығын табамыз

$r_{1\ (+q1\ -\ +q)} = 2a$,

$r_{2\ (-q2\ -\ +q)} = \sqrt{4a^2 + 4b^2}$, r3 (-q3 - +q) = 2b.

$$\overline{F}_1 = \left(\overline{x}_0 \cos\alpha + \overline{y}_0 \sin\alpha\right) \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\sqrt{4a^2 + 4b^2}} = \left(\overline{x}_0 \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \overline{y}_0 \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \cdot \frac{q^2}{8\pi\varepsilon}$$

$$\overline{F}_2 = -\overline{x}_0 \frac{q^2}{2a\pi\varepsilon} \qquad \overline{F}_3 = -\overline{y}_0 \frac{q^2}{2b\pi\varepsilon}$$

$$\overline{F} = \frac{q^2}{\pi\varepsilon}\left[\overline{x}_0\left(\frac{4}{5\cdot 8} - \frac{1}{8}\right) + \overline{y}_0\left(\frac{3}{5\cdot 8} - \frac{1}{6}\right)\right] \approx -\frac{q^2}{\pi\varepsilon}(1{,}025\vec{x}_0 + 0{,}025\vec{y}_0).$$