2.1.6 Есептерді шығару мысалдары

Жалпы қатынастар

1 мысал

Толық ток тығыздығы сызықтарының үзіліссіз және тұйық екендігін дәлелдеңіз.

Сұрақ 1.Толық ток сызықтарының тұйық болуы үшін, қандай теңдік (магниттік өріс сызықтарына сәйкес) орын алуы керек?

Шешуі:

$$\oint\limits_S \vec{j}\,d\overline{S} = 0$$

$$div\vec{j} = 0$$

- бізге бұл теңдіктерді дәлелдеу керек (25)

Толық токтың тығыздығы $\vec{j}$ - ға кіретін Максвелл теңдеуін жазу. Толық токтың (21) заңынан

$$div\,rot\overline{H} = div\vec{j}$$

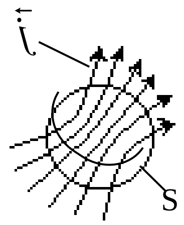
екендігі шығады.

$div\vec{j}$ есептейік

$$div\,rot\overline{H} = div\vec{j} \qquad (26),$$

$$div\,rot\overline{H} = 0$$ - векторлық анализдан (27)

1-суретте көрсетілгендей ешқайда сызықтың не басы, не аяғы жоқ екендігі, олай болса (27)-ні (26)-ға қойып, $\vec{j}$ ағынының $div\vec{j} = 0$ және $\oint\limits_S \vec{j}\,d\overline{S} = 0$ екендігін, яғни $\vec{j}$ ағыны ($\oint\limits_S$) тұйық беттен өткенде 0-ге тең болатындығын аламыз.



Көлемге қанша сызық кірсе, соншасы шығады.

Максвелл теңдеуінен шығатын салдар

2 мысал

Максвелл теңдеулерін қолданып, зарядтың сақталу заңын және үзіліссіздік теңдеулерін шығарыңыз.

$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \qquad divrot\vec{H} = div(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}) \equiv 0$$

Үзіліссіздік теңдеуі

$$div\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \oint_S \vec{j}d\bar{S} + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0 \qquad (28),$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V div\vec{j} dV = 0, \; \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = \frac{\partial q}{\partial t}, \; \int_V div\,\vec{j} dV = \int_S \vec{j} d\vec{S} = I.$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -I \text{ Зарядтың сақталу заңы} \qquad (29)$$

3 мысал

Уақыттан тәуелсіз, зарядтың көлемдік үлестіруінің біртекті өткізгіш ортада бола алмайтындығын дәлелдеңіз.

Сұрақ 1. Қандай математикалық қатынас берілген есепте құрастырылған тұжырымды сипаттайды?

Шешуі:

Зарядтың көлемдік тығыздығы ρ шамасымен сипатталады. Осыдан қандай да бір нүктеде $\rho \neq 0$ болса, онда міндетті түрде $d\rho/dt \neq 0$ екендігін дәлелдеу қажет.

Зарядтың көлемдік тығыздығы кіретін Максвелл теңдеуін жазу

$$div\overline{D} = \rho$$

Бұл теңдеуге $\overline{D}$ кіреді, ρ үшін теңдеу алу үшін $\overline{D}$-дан құтылуымыз керек, сондықтан біз $\overline{D}$ кіретін теңдеуді пайдалануымыз керек.

$$\vec{j} = \sigma\overline{E} + \frac{\partial\overline{D}}{\partial t}, \text{ біра } \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \text{ онда } \vec{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\overline{D} + \frac{\partial\overline{D}}{\partial t} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{D} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (30)$$

Вектор $\vec{j}$-ды бөлімдердің екеуінен div алған соң шығарамыз

$$div\vec{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon}div\overline{D} + \frac{\partial}{\partial t}div\overline{D}, \textit{ түткені } div\vec{j} = 0, div\overline{D} = \rho \text{ осыдан}$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (30a)$$

Егер ρ≠0, онда $\frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0$. Айнымалыларды бөлу арқылы келесіні аламыз

$$\frac{\partial\rho}{\rho} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\partial t \quad (31)$$

(31) теңдеуден ρ-ны анықтаймыз. Ол мынаған тең

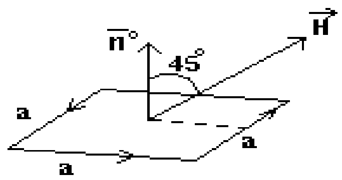
$$\rho = \rho_{\circ}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \quad (32)$$

Жауабы: $\rho = \rho_{\circ}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$.

Контурдағы ЭҚК анықтау

4 мысал

Рамкада $\overline{B} = \mu\overline{H}_{\circ}\cos\omega t$ вектор ағынымен қоздырылатын ЭҚК анықтаңыз. $\overline{H}$ векторының бағыты 2-суретте көрсетілген.



2-сурет

Шешуі:

Ағынды анықтау үшін, (15) қолданамыз және

$$\vec{B}\cdot\vec{n}^{0} = \left|\vec{B}\right|\left|\vec{n}^{0}\right|\cos 45^{0}$$

векторларының скалярлық көбейтіндісін біле отырып, қажетті түрлендірулерді жүргізуден кейін ағын үшін келесі өрнекті жазамыз

$$\Phi = \int_S \overline{B}d\overline{S} = \int_S \overline{B}\overline{n}^{\circ}dS = \cos 45^{\circ}\int_S BdS = \cos 45^{\circ}B\int_S dS = \frac{1}{\sqrt{2}}\mu\overline{H}_{\circ}\cos\omega t\cdot a^2$$

Электрқозғаушы күші келесі теңдеуден анықталады

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (33)$$

Ағынның мәнін (33)-ке қоямыз

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\mu H_{\circ}\sin\omega t\cdot a^2$$

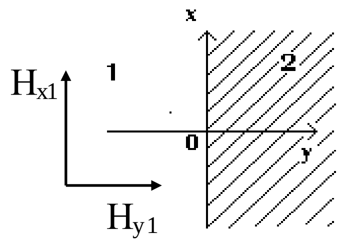
Жауабы: $E_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega \mu H_\circ \sin \omega t \cdot a^2$.

Шекаралық шарттардың қолданылуы

5 мысал

1-ci изотропты, 2-ci анизотропты, екі жартылай шексіз магниттік орта бар. Өткізгіштері 0-ге тең.

Орта параметрлері: $\mu_1 = \mu_0 ; \mu_2 = \begin{bmatrix} \mu_0 & -\alpha & 0 \\ +\alpha & \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$.



3-сурет

Бірінші ортадағы магни[illegible] $= \bar{x}^\circ H_{x1} + \bar{y}^\circ H_{y1}$. Екінші ортадағы магнит өрісін анықтау.

Шешуі:

3-суретке және (20) шекаралық шарттар негізінде бірінші және екінші орталар параметрлерінің байланысын жазамыз

$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \rightarrow H_{x1} = H_{x2} \quad (34),$$

$$B_{1n} = B_{2n} \rightarrow \mu_0 H_{1y} = B_{2n} \quad (35),$$

$$B_{2n} = B_{2y} ; B_{1n} = B_{1y} ; B_{1y} = B_{2y} \quad (36)$$

Екінші ортада магниттік өтімділік тензор болып көрсетілгендіктен, екінші орта үшін магниттік индукция векторын материалдық теңдеу (12) арқылы екі анықтауыштың туындысы және олардың көбейтіндісі түрінде жазамыз

$$\overline{B}_2 = \begin{bmatrix} B_{x2} \\ B_{y2} \\ B_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 & -\alpha & 0 \\ +\alpha & \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{x2} \\ H_{y2} \\ H_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 H_{x2} - \alpha H_{y2} \\ \alpha H_{x2} + \mu_0 H_{y2} \\ \mu_z H_{z2} \end{bmatrix} \qquad (37)$$

(37) теңдеуден B_{y2} құраушысын ерекшелей отырып, оны (35,36) шарттарға сәйкес теңестіріп жазамыз

$$B_{2y} = \alpha H_{x2} + \mu_0 H_{y2} = B_{1y} = \mu_0 H_{1y}$$

(34)-теңдеуден $H_{x2} = H_{x1}$ екендігі шығады, онда B_{x2} құраушысын қолдана отырып келесідей теңдеуді құрастырамыз

$$\alpha H_{x1} + \mu_0 H_{y2} = \mu_0 H_{1y}$$

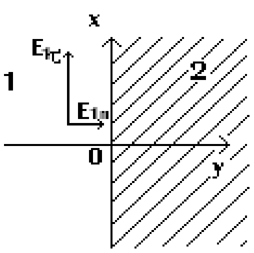
осыдан H_{y2} анықтауға болады

$$H_{y2} = \frac{1}{\mu_0}(\mu_0 H_{1y} - \alpha H_{x1}) \quad H_{2z} = H_{1z} = 0 \Rightarrow \overline{H}_2 = \overline{x}^\circ H_{x1} + \overline{y}^\circ (H_{y1} - \frac{\alpha}{\mu_0} H_{x1}).$$

Жауабы: $\overline{H}_2 = \overline{x}^\circ H_{x1} + \overline{y}^\circ (H_{y1} - \frac{\alpha}{\mu_0} H_{x1})$.

6 мысал

$\varepsilon_1 = \varepsilon_0; \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon_0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon_0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$ екі жартылай шексіз орта параметрлері бар; зарядтар жоқ (4-сурет). $\overline{E}_1 = \overline{x}^\circ E_{1x} + \overline{y}^\circ E_{1y}$ берілген. $\overline{E}_2$-ні анықтаңыз.



4-сурет

Шешуі:

Бұл есеп №5 есепке ұқсас, бірақ материалдық теңдеулер (11) және шекаралық шарттар (20) теңдеулерін қолданумен электрлік өріс кернеулігін анықтау үшін өткізіледі

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \to E_{1x} = E_{2x} \qquad D_{1y} = D_{2y} \qquad D_{1n} = D_{n2}$$

$$\overline{D}_2 = \begin{bmatrix} D_{2x} \\ D_{2y} \\ D_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon_0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon_0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \\ E_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon E_{2x} + \varepsilon_0 E_{2z} \\ \varepsilon E_{2y} \\ \varepsilon_0 E_{2x} + \varepsilon E_{2z} \end{bmatrix}$$

$$D_{1y} = D_{2y} \to \varepsilon_0 E_{1y} = \varepsilon E_{2y}; E_{2y} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_{1y} \Rightarrow \overline{E}_2 = \overline{x}^\circ E_{1x} + \overline{y}^\circ \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_{1y}$$

Жауабы: $\overline{E}_2 = \overline{x}^\circ E_{1x} + \overline{y}^\circ \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_{1y}$.

7 мысал

Электрмагниттік өрісте өзгеріссіз бағытты **E** векторы берілген. **E** және **B**-нің ортогональды екендігін көрсетіңіз.

Шешуі:

Берілген **E**-дан **B**-ны табайық.

E векторы бағыты бойынша координат осьтерінің біреуін бағыттайық. Мысалы **z**, онда E_x және E_y =0. Ол үшін (6) Максвеллдің екінші теңдеуін қолданайық.

rot өрнегін декарттық координаттар жүйесінде жазамыз

$$rot\overline{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$rot\overline{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & Ez \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{x}_0 B_X + \vec{y}_0 B_Y + \vec{z}_0 B_Z)\text{, т. к.}$$

$$E_X = E_Y = 0\text{, онда}$$

$$rot_X E = \frac{\partial E_Z}{\partial y} = -\frac{\partial B_X}{\partial t} \quad rot_Y E = -\frac{\partial E_Z}{\partial x} = -\frac{\partial B_Y}{\partial t} \quad rot_Z E = 0 = -\frac{\partial B_Z}{\partial t}$$

осыдан $B_Z = 0$. Демек $\overline{B} = \vec{x}_0 B_X + \vec{y}_0 B_Y$.

Скалярлық туынды аламыз

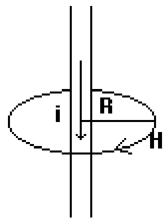
$$\left(\overline{E}\overline{B}\right) = \left(\vec{z}_0 E_Z \overline{B}\right) = (\vec{z}_0 \vec{x}_0 B_X E_Z + \vec{z}_0 \vec{y}_0 B_Y E_Z)\cos\left(\vec{z}_0 \vec{y}_0\right) = 0$$

$$\left\{E_z \vec{z}_0 \cdot \left(\vec{x}_0 B_x + y_0 B_y\right)\right\} = 0$$

Демек $\overline{E} \perp \overline{B}$.

8 мысал

8-суретте түзусызықты 2А тұрақты тогы бар өткізгіштен 10 см қашықтықтағы магниттік өріс кернеулігі қандай?



8-сурет

Шешуі:

$\oint\limits_L \vec{H}d\vec{l} = I$ интегралдық түрдегі Максвеллдің 1-теңдеуін қолданайық. Ток түзусызықты. Біз $\vec{H}\perp\vec{j}$ (есеп 13) екендігін дәлелдедік, демек **H** векторының сызықтары токтың бағытына перпендикуляр жазықтықта жатады және қисық сызық түрінде болады.

Ток түзусызықты, ал біз $\overline{H}\perp\vec{j}$ екендігін дәлелдегенбіз, сәйкесінше, **H** векторының сызықтары жазықтықта ток бағытына $\perp$ және тұйық қисықтардың түрінде болады. Циркуляцияны есептеуде қолданатын тұйық контурмен шеңберді енгіземіз.

$$d\vec{l} = \vec{\alpha}_0 \cdot r d\alpha, \quad \vec{H} = \vec{\alpha}_0 H_\alpha + \vec{r}_0 \cdot H_r, \quad \vec{H} d\vec{l} = H_\alpha d\alpha$$

мұндағы H_α - r қашықтықтағы тұрақты шама.

$$H \int_{2\pi R} dl = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi R} = \frac{2A}{6.28 \cdot 0.10 м} = 3.3 \, {}^{A}\!/\!{}_{м}$$

Таңдалған ток бағытындағы **H** вектор сағат тілшесі бойынша бағытталған, яғни оң бұрғы жүйесін құрайды.

9 мысал

Электрондысәулелік түтікшедегі электронды ағынның радиусы **a**=1мм (**a**<<**l**-түтікше ұзындығы) және көлемдік тығыздығы $\rho=3\cdot10^{-8}$ кг/м^3 болатын, $\upsilon=5\cdot10^7$ м/с жылдамдықпен қозғалады. Түтікшедегі ток шамасы қандай?

Шешуі:

$$I_{пер} = \rho \cdot \upsilon \cdot S, \qquad S = \pi a^2 = 3.14 \cdot 10^{-6} (м^2),$$

$$S \cdot \rho = 3.14 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-8} = 9{,}42 \cdot 10^{-14} (Кл/м),$$

$$i_{пер} = 9.42 \cdot 10^{-14} \cdot 5 \cdot 10^{7} = 4.71 \cdot 10^{-6} (A).$$

10 мысал

Қандай да бір бос кеңістік көлемінде $\overline{E} = 10\overline{y}^{\circ}(B/м)$ электр өрісі және $\overline{H} = 15\overline{x}^{\circ}(A/м)$ магнит өрісі бар. Осы көлемге жылдамдығы $\overline{\upsilon} = 10^6 \overline{z}^{\circ}(м/с)$ болатын q=10^{-9}(Кл) заряды ұшып кіреді. Зарядқа және оның бағытына әсер ететін күшті анықтаңыз.

Шешуі:

$$\mu_{\circ} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,(Гн/м), \qquad \overline{F} = q\left\{\overline{E} + \left[\overline{\upsilon} \times \overline{B}\right]\right\}$$

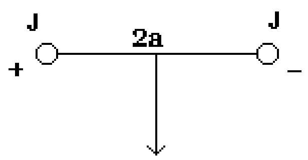
$$\vec{F}_{\acute{y}} = q\vec{E} = 10^{-9} \cdot 10 \cdot \overline{y}^{\circ} = 10 \cdot 10^{-9}\,\overline{y}^{\circ}$$

$$F_{\grave{i}} = q\left[\overline{\upsilon} \times \overline{B}\right] = q\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 10^{6} \\ 15 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 18.84 \cdot 10^{-9}\,\overline{y}^{\circ}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{э} + \vec{F}_{м} = 28.84 \cdot 10^{-9}\,\overline{y}^{\circ}(H).$$

11 мысал

Бірдей, бірақ қарама-қарсы бағытталған өзара параллель шексіз өткізгіштер ортасындағы магнит өрісінің кернеулігінің шамасы қандай?



Шешуі:

$$H = \frac{I}{2\pi a}$$

Екі әртүрлі бағытталған өріс, бірақ суперпозиция принципі бойынша токтың шамасы бірдей.

$$H_{\Sigma} = H_{1} + H_{2} = 2H_{1} = \frac{2I}{2\pi a} = \frac{I}{\pi a}.$$

Магнит энергиясын есептеу

12 мысал

Массасы 3 кг болатын трансформатордың өзекшесі тығыздығы 8,1 г/см^3 болаттан жасалған. Болаттың салыстырмалы магнит өтімділігі μ=220, магнит индукциясының амплитудалық мәні 1,85 Тл. Осы синусоидалды токпен магниттелгендегі энергияның максимал мәнін анықтаңыз.

Шешуі:

Магнит өрісінің меншікті энергиясы келесі қатынаспен анықталады

$$\varpi_{н} = \frac{\mu\mu_{0}H^{2}}{2} = \frac{B^{2}}{2\mu\mu_{0}} \qquad (38)$$

Өзекшені (38) көлем бойынша интегралдай магнит өрісінің толық энергиясын аламыз

$$\int_{V} \varpi_{н} dV \qquad (39)$$

Бірақ көлем берілмеген, оны анықтау керек, ол үшін өзекшенің m массасын ($\rho_{н}$) тығыздыққа бөлеміз

$$v = \frac{m}{\rho_{h}}$$

Онда өзекшеде жинақталатын энергия мынаған тең

$$W_{H} = \omega_{н} \cdot v = \frac{B^{2}m}{\mu_{0}\mu \cdot \rho_{h}} \qquad (40)$$

Берілген есеп үшін

$$W_{н} \frac{1{,}85^{2} \cdot 3 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 220 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8{,}1} = 2{,}294 \text{ Дж}$$