2.1.9 Есептерді шығару мысалдары

1 мысал

Толқын ұзындығы $\lambda = 0{,}155\text{мкм}$ болатын ультракүлгін сәулелену түскенде күміс бетінен ыршып шығатын фотоэлектрондардың ең үлкен жылдамдығын υ_{max} анықтаңыз.

Шешуі:

Фотоэлектрондардың ең үлкен жылдамдығын фотоэффект үшін арналған Эйнштейн теңдеуінен анықтауға болады

$$\varepsilon = A + T_{max} \qquad (1)$$

мұндағы ε – металл бетіне түскен фотонның энергиясы;

А – шығу жұмысы;

T_{max} – фотоэлектрондардың максимал кинетикалық энер гиясы.

Фотон энергиясы келесі формуламен есептеледі

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} \qquad (2)$$

мұндағы h – Планк тұрақтысы;

c – вакуумдағы жарық жылдамдығы;

λ – толқын ұзындығы.

Фотоэлектронға қандай жылдамдық берілетіндігіне байланысты электронның кинетикалық энергиясы немесе классикалық формула бойынша

$$T = \frac{m_0\upsilon^2}{2} \qquad (3)$$

немесе релятивистік формула бойынша өрнектеледі

$$T = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \qquad (4)$$

мұндағы $\beta = \dfrac{\upsilon}{c}$.

Фотоэлектронның жылдамдығы фотоэффектті тудыратын фотон энергиясына тәуелді: егер энергия ε электронның тыныштық E_0 энергиясынан көп кем болатын болса, онда (3) формуласы қолданылады, егер де ε шамасы жағынан E_0 шамасына жақын болатын болса, онда (3) формуласы бойынша жасалынған есептеу қателікке әкеледі, сондықтан (4) формуласын қолдану керек.

Фотонның энергиясын формула (2) көмегімен есептейік

$$\varepsilon = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{1{,}55\cdot 10^{-7}}\,Дж = 1{,}28\cdot 10^{-18}\,Дж$$

немесе

$$\varepsilon = \frac{1{,}28\cdot 10^{-18}}{1{,}6\cdot 10^{-19}}\,эВ = 8эВ$$

Фотонның энергиясы (8эВ) электронның тыныштық энергиясынан (0,51МэВ) көп кем. Демек, берілген жағдай үшін фотоэлектронның кинетикалық энергиясы (1) классикалық формуласымен (3) өрнектеледі

$$\varepsilon = A + \frac{m_0\upsilon_{max}^2}{2}$$

осыдан

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\frac{2(\varepsilon - A)}{m_0}} \qquad (5)$$

Алынған өрнек жылдамдығы бірлігін беретіндігін тексерейік. Ол үшін (5) формуласының оң жағына шамалардың символдарының орындарына бірлік белгілерін қояйық

$$\left(\frac{[\varepsilon - A]}{[m_0]}\right)^{1/2} = \left(\frac{1Дж}{1кг}\right)^{1/2} = \left(\frac{1кг\cdot м^2/с^2}{1кг}\right)^{1/2} = 1\frac{м}{с}$$

Алынған бірлік жылдамдық бірлігі болып табылады.

Шамалардың мәнін (5) формуласына қойсақ

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\frac{2\cdot\left(1{,}28\cdot 10^{-18} - 0{,}75\cdot 10^{-18}\right)}{9{,}11\cdot 10^{-31}}}\,\frac{м}{с} = 1{,}08\cdot 10^{6}\,\frac{м}{с}$$

2 мысал

Массасы $m = 0,2$ *мкг* болатын радиактивті ^{27}Mg магний препаратының бастапқы активтілігін A_0, сонымен қатар t=6 сағ уақыт өткеннен кейінгі A активтілікті анықтаңыз. Магнийдің жартылай ыдырау периоды $T_{1/2}$ белгілі.

Шешуі:

Изотоптың A активтілігі радиоактивті ыдыраудың жылдамдығын сипаттайды

$$A = -\frac{dN}{dt} \tag{1}$$

«-» таңбасы уақыт өткен сайын радиоактивті N ядролар саны азаятындығын көрсетеді.

Туынды $\frac{dN}{dt}$ қатысын табу үшін радиоактивті ыдырау заңын қолданамыз

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{2}$$

мұндағы N – t уақыт мезетіндегі изотоптың құрамында болатын радиоактивті ядролар саны;

N_0 – бастапқы деп алынған (t=0) уақыт мезетіндегі радиоактивті ядролар саны;

λ – радиактивті ыдырау тұрақтысы.

(2) өрнегін уақыт бойынша дифференциалдайық

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N_0 t^{-\lambda t} \tag{3}$$

(1) және (3) формулаларынан t уақыт мезетіндегі препараттың активтілігін табамыз

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \tag{4}$$

Препараттың A_0 активтілігін t=0 деп алғанда табамыз

$$A_0 = \lambda N_0 \tag{5}$$

λ радиактивті ыдырау тұрақтысы $T_{1/2}$ жартылай ыдырау периодымен төмендегі қатынас бойынша байланысқан

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \tag{6}$$

Изотоптың құрамына кіретін радиоактивті ядролар N_0 саны Авогадро N_A саны және берілген изотоптың ν зат мөлшері көбейтісіне тең

$$N_0 = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A \tag{7}$$

мұндағы m – изотоптың массасы;
M – молярлық масса.

(6) және (7) өрнектерін ескере отырып, (5) және (4) формулаларын төмендегі түрде жазуға болады

$$A_0 = \frac{m}{M} \cdot \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_A \tag{8}$$

және

$$A = \frac{m}{M} \cdot \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_A e^{\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} \tag{9}$$

$T_{1/2}$= 10 мин=600 с, ln2=0,693, $t = 6ч = 6 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3 c = 2{,}16 \cdot 10^4 c$ мәндерін ескеріп, есептейік

$$A_0 = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{0{,}693}{600} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\, Бк = 5{,}13 \cdot 10^{12}\, Бк = 5{,}13 \quad ТБк$$

$$A = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{0{,}693}{600} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot e^{-\frac{0{,}693}{600} \cdot 2{,}16 \cdot 10^4}\, Бк = 81{,}3 \quad Бк$$

3 мысал

Егер фотонның еркін жүру жолының ұзындығы 10^{-8} м екендігі белгілі болса, онда жарықтатылған беттен $x_1 = 10^{-6}$ см-ден $x_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ см-ге дейінгі координаттармен саналған аралығындағы жартылай өткізгіштің қабатында түсірілетін сәуленің интенсивтілігінің қандай бөлігі жұтылады?

Шешуі:

Есепті шешу үшін Бугер–Ламберт заңын негіз етіп аламыз, ол $I(x)$ жарықталған беттен x қашықтығындағы оптикалық сәулелену интенсивтілігі тереңдіктің үлкеюімен экспозиционалдық заңы бойынша азаяды

$$I(x) = (1 - R) \cdot I_0 \exp(-\alpha x) \tag{1}$$

мұндағы R – сәуленің беттен шағылуының коэффициенті;
α – жұтылу коэффициенті, ол шамасы бойынша фотонның $\ell_ф$ еркін жүру жолына кері пропорционал.

$$\alpha = \frac{1}{\ell_ô}$$

яғни, $x_1 = 10^{-6}$ см нүктесіндегі сәуленің интенсивтілігі мынаған тең болады

$$I(x_1) = I_0 \exp(-\alpha x_1)$$

Зат қабаты $x_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ см нүктесіне дейін өтіп, келесіге дейін азаяды

$$I(x_2) = I_0 \exp(-\alpha x_1) \cdot \exp(-\alpha x_2) = I_0 \exp(-\alpha(x_1 + x_2))$$

Демек, қалыңдығы $(x_2 - x_1)$ қабатта келесідей интенсивтілік жұтылады

$$\Delta I(x_2 - x_1) = I(x_1) - I(x_2) = I_0 \exp(-\alpha x_1) - I_0 \exp(-\alpha(x_1 + x_2)) =$$
$$= I_0 \exp(-\alpha x_1) \cdot [1 - \exp(-\alpha x_2)]$$

немесе салыстырмалы бірлікте

$$\frac{\Delta I(x_2 - x_1)}{I_0} = \exp(-\alpha x_1) \cdot [1 - \exp(-\alpha x_2)] \ .$$

Сандық мәндерді сантиметрмен қоя отырып, келесіні аламыз

$$\frac{\Delta I(x_2 - x_1)}{I_0} = \exp(-10^6 \cdot 10^6)[1 - \exp(-10^6 \cdot (2 \cdot 10^{-6} - 10^6))] =$$

$$= \exp(-1)[1 - \exp(-1)] = \frac{1}{\exp(1)}\left[\frac{\exp(1) - 1}{\exp(1)}\right] = \frac{\exp(1) - 1}{(\exp(1))^2} \approx \frac{2{,}7 - 1}{2{,}7 \cdot 2{,}7} = \frac{1{,}7}{7{,}3} \approx 0{,}23$$

Есепте қойылған сұраққа жауап осындай: берілген қабатта түсірілетін интенсивтіліктің 23% жұтылады.

4 мысал

Қара дененің сәулелену спектрінде ең көп энергия $\lambda_0 = 0{,}58 мкм$ толқын ұзындығында сәулеленеді. Дене бетінің энергетикалық жарықтылығын R_e анықтаңыз.

Шешуі:

Абсолют қара дененің энергетикалық жарықтылығы R_e Стефан-Больцман заңына сәйкес термодинамикалық температураның төртінші дәрежесіне тура пропорционал болады және төмендегі формуламен өрнектеледі

$$R_e = \sigma T^4 \qquad (1)$$

мұндағы σ – Стефан-Больцман тұрақтысы;
T – термодинамикалық температура.

T температураны Виннің ығысу заңы көмегімен есептеуге болады

$$\lambda_0 = \frac{b}{T} \qquad (2)$$

мұндағы b – Вин ығысу заңының тұрақтысы.
(2) және (1) қолдана отырып мынаны аламыз

$$R_e = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_0} \right)^4 \qquad (3)$$

Есептейміз

$$R_e = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \left(\frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{5{,}8 \cdot 10^{-7}} \right)^4 \frac{Вт}{м^2} = 3{,}54 \cdot 10^7 \frac{Вт}{м^2} = 35{,}4 \frac{МВт}{м^2}.$$