

2.1.12 Есептерді шығару мысалдары

1 мысал

Нүкте жиілігі $\nu = 10$ Гц гармоникалық тербеліс жасайды. Бастапқы кезде нүктенің максимал ығысуы $x_{\max} = 1$ мм болды. Нүктенің тербеліс теңдеуін жазып, графигін сызыңыз.

Шешуі:

Нүктенің тербеліс теңдеуін келесі түрде жазуға болады

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (1)$$

немесе

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (2)$$

мұндағы A – тербеліс амплитудасы;

ω – циклдік жиілік;

t – уақыт; φ_1 және φ_2 – (1) немесе (2) жазу формаларына сәйкес келетін бастапқы фазалар.

Тербеліс амплитудасы анықтама бойынша мынаған тең

$$A = x_{\max} \quad (3)$$

Циклдік ω жиілік пен ν жиілік келесідей байланыста

$$\omega = 2\pi\nu \quad (4)$$

Тербелістің бастапқы фазасы жазу формасына тәуелді. Егер (1) форманы қолдансақ, онда бастапқы фазаны $t = 0$ кезіндегі шартынан анықтауға болады

$$x_{\max} = A \sin \varphi_1$$

осыдан

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{x_{\max}}{A} = \arcsin 1$$

немесе

$$\varphi_1 = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Тербеліс фазасының 2π -ге өзгеруі тербелмелі қозғалыстың күйін өзгертпейді, сондықтан

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

Келесі формадағы жазу жағдайында

$$\varphi_2 = \arccos \frac{x_{\max}}{A} = \arccos 1$$

аламыз, немесе

$$\varphi_2 = 2\pi k (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

бірінші жағдайдағы сияқты келесіні анықтаймыз

$$\varphi_2 = 0 \quad (6)$$

(3) – (6) теңдеулерін ескерсек, тербеліс теңдеулері келесі түрге ие болады

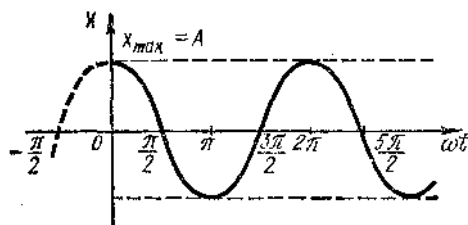
$$x = x_{\max} \sin\left(2\pi\nu t + \frac{\pi}{2}\right)$$

немесе

$$x = x_{\max} \cos 2\pi\nu t,$$

мұндағы $x_{\max} = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$;

$\nu = 10 \text{ Гц}$.



1- сурет

Осы гармоникалық тербелістің графигі 1-суретте келтірілген.

2 мысал

Келесі теңдеулермен сипатталатын, бір бағыттағы екі тербеліс беттеседі

$$x_1 = A_1 \cos \frac{2\pi}{T} (t + \tau_1);$$

$$x_2 = A_2 \cos \frac{2\pi}{T} (t + \tau_2),$$

мұндағы $A_1 = 3$ см; $A_2 = 2$ см;

$\tau_1 = 1/6$ с; $\tau_2 = 1/3$ с;

$T = 2$ с.

Осы тербелістер беттесуінің векторлық диаграммасын құрыңыз және қорытқы тербелістің теңдеуін жазыңыз.

Шешуі:

Екі беттескен тербелістердің векторлық диаграммасын құру үшін, қандайда бір уақыт мезетін белгілеу керек. Әдетте, векторлық диаграмманы екі теңдеуді де канондық формаға $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ келтіріп, $t = 0$ уақыт үшін құрады

$$x_1 = A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{2\pi}{T} \tau_1\right);$$

$$x_2 = A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{2\pi}{T} \tau_2\right).$$

Осыдан, беттесетін екі тербелістің де циклдік жиіліктері тең екендігі көрінеді

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1}$$

Бірінші φ_1 және екінші φ_2 тербелістердің бастапқы фазалары сәйкесінше тең

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{T} \tau_1 \tag{2},$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{T} \tau_2 \quad (3)$$

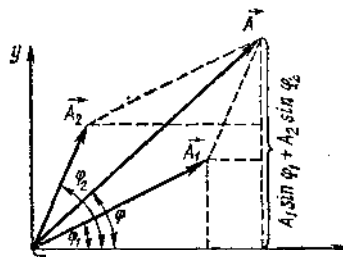
(3) формулаларға мәндерін қойып, есептеулер жүргізгеннен кейін

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} c^{-1} = 3,14c^{-1}$$

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{2} \frac{1}{6} \text{ рад} = 30^\circ$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{2} \frac{1}{3} \text{ рад} = 60^\circ$$

2-суретте \vec{A}_1 және \vec{A}_2 векторларын сызамыз. Ол үшін $A_1 = 3$ см және $A_2 = 2$ см кесінділерін x өсіне $\varphi_1 = 30^\circ$ және $\varphi_2 = 60^\circ$ бұрыштарымен жүргіземіз. Қорытқы тербеліс беттесетін тербелістердің \vec{A}_1 және \vec{A}_2 амплитудаларының геометриялық қосындысына тең \vec{A} амплитудамен және ω жиілікпен өтеді.



2-сурет

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

Косинустар теоремасы бойынша

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (4)$$

Қорытқы тербелістің бастапқы фазасын векторлық диаграммадан да тікелей анықтауға болады

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (5)$$

(4) және (5) формулаларға мәндерін қойып, есептеулер жүргізгеннен кейін

$$A = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2 * 3 * 2 \cos(60^\circ - 30^\circ)} \text{ см} = 4,84 \text{ см}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{3 \sin 30^\circ + 2 \sin 60^\circ}{3 \cos 30^\circ + 2 \cos 60^\circ} = \operatorname{arctg} 0,898 = 42^\circ$$

немесе $\varphi = 0,735$ рад.

Қорытқы тербеліс гармоникалық және жиілігі беттесетін тербелістердің жиілігіне тең болғандықтан, оны мына түрде жазуға болады

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

мұндағы $A = 4,84$ см;

$\omega = 3,14$ с⁻¹;

$\varphi = 0,735$ рад.

3 мысал

Жазық толқын түзу бойымен $v = 20$ м/с жылдамдықпен таралады. Осы түзуде, толқын көзінен $x_1 = 12$ м және $x_2 = 15$ м орналасқан екі нүкте тербеледі. Олардың фазалар айырмасы $\Delta\varphi = 0,75 \pi$ тең. Толқын ұзындығын λ табыңыз, толқын теңдеуін жазыңыз және $t = 1,2$ с уақыт мезетіндегі көрсетілген нүктелердің,

егер тербелістердің амплитудалары $A = 0,1$ м болса, ығысуын анықтаңыз.

Шешуі:

λ толқын ұзындығына тең қашықтықта орналасқан нүктелер тербелістерінің фазалар айырмасы 2π -ге тең, ал бір-бірінен кезкелген Δx қашықтықта орналасқан нүктелер тербелісінің фазалар айырымы

$$\Delta\varphi = (\Delta x/\lambda)2\pi = ((x_2 - x_1)/\lambda)2\pi$$

Осы теңдікті λ -ға қатысты шеше отырып келесіні анықтаймыз

$$\lambda = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}(x_2 - x_1)$$

Осы теңдеуге енетін шамалардың сандық мәндерін қойып, есептегеннен кейін келесіні аламыз

$$\lambda = \frac{2\pi}{0,75\pi}(15 - 12)\text{м} = 8 \text{ м}$$

Жазық толқынның теңдеуін жазу үшін, ω циклдік жиілікті анықтау қажет. $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (T – тербеліс периоды) және $T = \frac{\lambda}{v}$ болғандықтан

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$$

Есептеулерді жүргізгеннен кейін

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 20}{8} \text{с}^{-1} = 2\pi \text{с}^{-1}$$

Тербелістің A амплитудасын, ω циклдік жиілігін және v толқынның таралу жылдамдығын біле отырып, осы жағдай үшін жазық толқынның теңдеуін жазуға болады

$$y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

$$\text{мұндағы } A = 0,1 \text{ м};$$

$$\omega = 2\pi \text{ с}^{-1};$$

$$v = 20 \text{ м/с}.$$

Көрсетілген нүктелердің y ығысуын анықтау үшін осы өрнекке t мен x -тің мәндерін қою жеткілікті

$$y_1 = 0,1 \cos 5\pi \left(1,2 - \frac{12}{20} \right) \text{ м} = 0,1 \cos 3\pi \text{ м} = -0,1 \text{ м};$$

$$y_2 = 0,1 \cos 5\pi \left(1,2 - \frac{15}{20} \right) \text{ м} = 0,1 \cos 2,25\pi \text{ м} = 0,071 \text{ м} = 7,1 \text{ см}.$$