2.1.3 Примеры решения задач

1 пример

Задан потенциал $\varphi = 2 \cdot r^2 - 4$, где r - цилиндрическая координата. Определить объёмную плотность заряда, создающего это поле.

Решение:

По заданному закону распределения потенциала в пространстве $\varphi(r,\alpha,z)$ найти распределение свободных зарядов (с помощью уравнения Пуассона). Записываем уравнение Пуассона (12)

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

в нашем случае поле зависит от r, поэтому расписываем уравнение в цилиндрической системе координат только для r координаты

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (18)$$

последовательно дифференцируя его, находим выражение для объемной плотности заряда

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r4r) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \frac{8r}{r} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \rho = -8\varepsilon_0.$$

Ответ: $\rho = -8\varepsilon_0$.

2 пример

Из плоского катода К вылетают электроны в направлении плоского анода А. расстояние между электродами много меньше их размеров. Потенциал электрического поля между электродами меняется по закону $\varphi = kx^{4/3}$, где k - const.

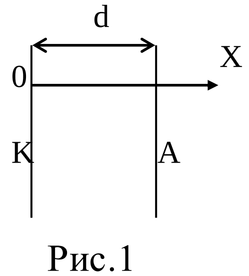


Рис.1

Определить распределение зарядов в области между электродами и на электродах.

Решение:

Каково распределение объемной плотности зарядов ρ в области между электродами? Каким уравнением нужно воспользоваться для этой цели?

Здесь также можно воспользоваться уравнением Пуассона (12)

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Как видно из условия задачи поле зависит только от координаты X (краевыми эффектами пренебрегаем). Поэтому получим

$$\rho(x) = -\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{4}{9}\kappa\varepsilon x^{-2/3} \tag{19}$$

Определяем плотность поверхностных зарядов на катоде и на аноде. Для этого нужно воспользоваться граничными условиями для границы раздела металл-диэлектрик

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\xi}{\varepsilon} \tag{20}$$

(обратить внимание на правильный выбор направления нормали). В нашем случае нормалью к катоду будет ось X. Поэтому поверхностная плотность заряда на катоде будет

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{\xi}{\varepsilon}$$

$$\xi_к = -\varepsilon\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{4}{3}\kappa\varepsilon x^{1/3}\Big|_{x=0} = 0$$

Аналогично нормаль к аноду противоположна по направлению оси X. Поэтому для анода

$$\xi_a = \varepsilon\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=d} = \frac{4}{3}\kappa\varepsilon d^{1/3} \tag{21}$$

Движение электронов от катода к аноду приводит к появлению тока. По первому закону Кирхгофа величина этого тока в любом сечении, параллельном плоскостям катода и анода, должна быть той же, следовательно, неизменной должна быть и плотность тока **j**, которая в данном случае сводится к плотности тока переноса

$$\vec{j} = \rho\bar{v} = const \tag{22}$$

где v – скорость движения заряда.

Отсюда
$$\rho \sim \frac{1}{v} \tag{23}$$

Вылетевший из катода электрон имеет скорость v, близкую к нулевой. По мере удаления от катода электрон разгоняется, v растет и ρ непрерывно падает. Так как энергия

$$W = \frac{mv^2}{2} = qU$$

то
$$v \sim \sqrt{\varphi} \tag{24}$$

и
$$\rho \sim \varphi^{-1/2}$$

Посмотрим, как из решения данной задачи следует закон степени 3/2, связывающий ток и напряжение в плоском диоде

а) $\dfrac{mv^2}{2} = e\varphi,\qquad v = \sqrt{\dfrac{2e\varphi}{m}}$;

б) $j = \rho v,\qquad \rho = -\dfrac{4}{9}\kappa\varepsilon x^{-2/3} = -\dfrac{4}{9}\varepsilon x^{-2}\varphi$;

в) $i = \rho v S = \sqrt{\dfrac{2e\varphi}{m}} \cdot \left(-\dfrac{4}{9}\varepsilon x^{-2}\varphi\right)S$.

Полагая $x = d$, и следовательно,

$$i = -\frac{4}{9}\frac{\varepsilon}{d^2}S\sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot u^{3/2} = \alpha u^{3/2}.$$

3 пример

Получить выражение потенциала для плоского конденсатора, изображенного на рис.2.

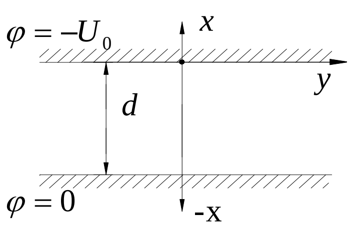


Рис.2

Решение:

Поле внутри плоского конденсатора описывается уравнением Лапласа в декартовой системе координат и является функцией только координаты X.

$$\nabla^2\varphi = 0 \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$$

дважды интегрируя, находим выражение для потенциала внутри конденсатора

$$\varphi = C_1 x + C_2 \tag{25}$$

Удовлетворим граничные условия. При x=0 (на верхней пластине конденсатора) потенциал $\varphi = \varphi_2 = -U_0$. Получаем $C_2 = -U_0$. Тогда (25), примет вид

$$\varphi = C_1x\text{-}U_0 \tag{26}$$

При X = d $\varphi = 0$, тогда подставляя в (26) $0 = -\ C_1\ d\ -U_0$ находим C_1

$C_1 = +\ U_0/d$. Значит, конечный результат для φ будет

$$\varphi = -\frac{U_0 x}{d} - U_0 .$$

Ответ: $\varphi = -\frac{U_0}{d}\cdot x - U_0$.

4 пример

Получите выражение потенциала φ в точке М, создаваемое точечным зарядом q, расположенным над идеально проводящей плоскостью на высоте h (см. рис.3).

Решение:

Используя метод зеркальных изображений и метод суперпозиции, записываем для потенциала в точке М выражение

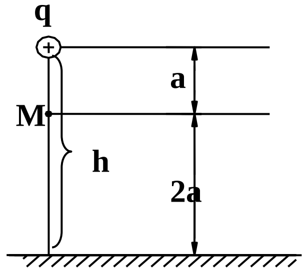


Рис. 3

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon\,a} - \frac{q}{4\pi\varepsilon\,5a} = \frac{4q}{20\pi\varepsilon\,a} = \frac{q}{5\pi\varepsilon\,a}$$

Ответ: $\varphi = \dfrac{q}{5\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot a}$.

5 пример

Найти силу, действующую на точечный заряд q, помещенный на расстояниях *a* = 4 см и *b* = 3 см от двух проводящих полуплоскостей, образующих между собой прямой угол (рис.4).

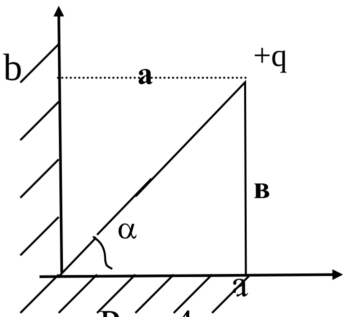


Рис. 4

Решение:

Применяем метод зеркальных изображений. Так как заряд +q находится в соседстве с проводящими плоскостями, то можно подобрать дополнительные заряды 1(+q), 2 (-q), 3 (-q), как показано на рис. 5, являющиеся зеркальным изображением заданного. Определяем силу (направление силы от плюса к минусу), действующую на заряд *q* со стороны трех эквивалентных зарядов (рис.6). Согласно принципу суперпозиции на заряд действуют 3 силы.

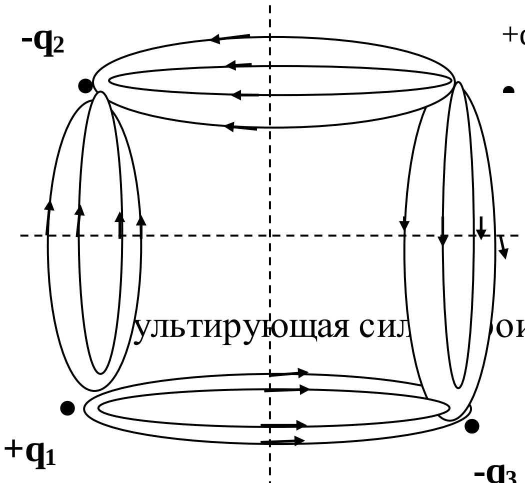
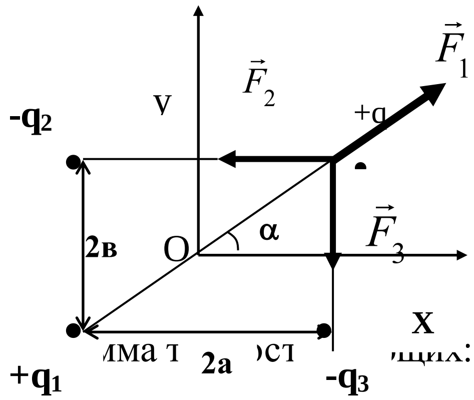


Рис.5



ультирующая сил оится има т ост щих:

$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$ Рис.6

где $\vec{F}_i = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\,\varepsilon\,r_i^2}$ - закон Кулона (27)

Находим расстояния r_1, r_2, r_3 между зарядами

$r_{1\ (+q1\ -\ +q)} = 2a$

$r_{2\ (-q2\ -\ +q)} = \sqrt{4a^2 + 4b^2}$

$r_{3\ (-q3\ -\ +q)} = 2b$

$$\overline{F}_1 = \left(\overline{x}_0 \cos\alpha + \overline{y}_0 \sin\alpha\right) \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\sqrt{4a^2 + 4b^2}} = \left(\overline{x}_0 \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \overline{y}_0 \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \cdot \frac{q^2}{8\pi\varepsilon}$$

$$\overline{F}_2 = -\overline{x}_0 \frac{q^2}{2a\pi\varepsilon} \qquad \overline{F}_3 = -\overline{y}_0 \frac{q^2}{2b\pi\varepsilon}$$

$$\overline{F} = \frac{q^2}{\pi\varepsilon}\left[\overline{x}_0\left(\frac{4}{5\cdot 8} - \frac{1}{8}\right) + \overline{y}_0\left(\frac{3}{5\cdot 8} - \frac{1}{6}\right)\right] \approx -\frac{q^2}{\pi\varepsilon}(1{,}025\vec{x}_0 + 0{,}025\vec{y}_0).$$