Уравнения Максвелла и граничные условия

Уравнения Максвелла дают полные сведения об электромагнитном поле. Оно характеризуется четырьмя векторными величинами: $\vec{E}$ - напряженность электрического поля, измеряемая в вольтах на метр (В/м); $\vec{D}$ - электрическая индукция – кулон на квадратный метр (Кл/м²); $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля - ампер на метр (А/м); $\vec{B}$ - магнитная индукция, измеряется в веберах на квадратный метр (Вб/м²).

Уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{H}D\vec{l} = \vec{I}_{полн} \text{ - закон полного тока} \quad (1),$$

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt}d\vec{S} \text{ -обобщенный закон электромагнитной индукции } (2),$$

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q \text{ - постулат Максвелла} \quad (3),$$

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0 \text{ - закон непрерывности} \quad (4)$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$rot\vec{H} = \vec{j}_{полн} \quad (5),$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (6),$$

$$div\vec{D} = \rho \quad (7),$$

$$div\vec{B} = 0 \quad (8)$$

Плотность полного тока представляет сумму четырех токов

$$\vec{j}_{полн} = \vec{j}_{см} + \vec{j}_{пр} + \vec{j}_{пер} + \vec{j}_{ст} \quad (9)$$

соответственно плотности тока смещения, плотности тока проводимости, плотности тока переноса и плотности стороннего тока.

Определение плотностей токов смещения, проводимости и тока переноса

$$\vec{j}_{пр}=\sigma\ \overline{E};\quad \vec{j}_{см}=\frac{\partial\overline{D}}{\partial t};\quad \vec{j}_{пер}=\rho\cdot\overline{V} \qquad (10)$$

В эти уравнения входят σ - удельная объемная проводимость вещества, измеряемая в Сименсах на метр (Им/м) и объемная плотность заряда ρ, (Кл/м³).

Связь векторов поля в некоторой материальной среде обычно характеризуют уравнениями

$$\vec{B}\ =\mu_a\vec{H} \qquad (11),$$

$$\overline{D}=\varepsilon_a\overline{E} \qquad (12)$$

где μ_a – абсолютная магнитная проницаемость;

ε_a - абсолютная диэлектрическая проницаемость.

Часто бывает удобно характеризовать среды по сравнению с вакуумом, в связи, с чем вводятся относительные проницаемости

$$\mu_r=\mu_a/\mu_0 \qquad (13),$$

$$\varepsilon_r=\varepsilon_a/\varepsilon_0 \qquad (14)$$

где $\varepsilon_0=10^{-9}/(36\pi)$ Ф/м - электрическая постоянная;

$\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Магнитным потоком Ф, пронизывающим поверхность, называется интеграл

$$\Phi=\int_S\vec{B}d\vec{S} \qquad (15)$$

Тогда уравнение (2) запишется как

$$\int\vec{E}d\vec{l}\ =-\frac{d\Phi}{dt} \qquad (16),$$

$$\oint_S\vec{E}d\vec{S}=\int_V div\vec{E}d\vec{V}$$ - теорема Остроградского (18),

$$\oint_L\vec{H}d\vec{l}\ =\int_S rot\vec{H}d\vec{S}$$ - теорема Стокса (19)

Уравнения, определяющие граничные условия

$$\begin{aligned} D_{1n} - D_{2n} &= \xi; \\ E_{1\tau} &= E_{2\tau}; \\ B_{1n} &= B_{2n}; \\ H_{1\tau} - H_{2\tau} &= \eta; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\bar{n}^\circ(\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \xi; \\ &\left[\bar{n}^\circ(\bar{E}_1 - \bar{E}_2)\right] = 0; \\ &\bar{n}^\circ(\bar{B}_1 - \bar{B}_2) = 0; \\ &\left[\bar{n}^\circ(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)\right] = \eta. \end{aligned} \qquad (20),$$

$$div\, rot\, \vec{H} = div\, \vec{j}_{полн} \equiv 0$$

$$\int_V div\, \vec{j}_{полн} d\vec{V} = \int_S \vec{j}_{полн} d\vec{S} = I_{полн}$$ - Закон полного тока (21)

Определение расходимости (дивергенции) вектора $\vec{a}$ декартовой системе координат

$$div\, \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \qquad (22)$$

Определение ротора вектора $\vec{a}$

$$rot\bar{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{h_2 h_3}\bar{q}_1^\circ & \frac{1}{h_1 h_3}\bar{q}_2^\circ & \frac{1}{h_1 h_2}\bar{q}_3^\circ \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 a_1 & h_2 a_2 & h_3 a_3 \end{vmatrix} \qquad (23)$$

Определение градиента потенциала φ

$$grad\varphi = G = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\vec{q}_1^o + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\vec{q}_2^o + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\vec{q}_3^o \qquad (24)$$