2.1.6 Примеры решения задач

Общие соотношения

1 пример

Доказать, что линии плотности полного тока непрерывны и замкнуты.

Вопрос 1. Какое равенство (по аналогии с линиями магнитного поля) должно иметь место, чтобы линии полного тока были замкнуты?

Ответ:

$$\oint_S \vec{j}\,d\overline{S} = 0, \quad div\vec{j} = 0 \qquad \text{-эти равенства нам и нужно доказать} \qquad (25)$$

Записать уравнение Максвелла, в которое входит плотность полного тока $\vec{j}$.

Из закона полного тока (21) следует, что

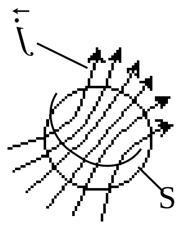
$$div rot\overline{H} = div\vec{j}$$

Вычислим $div\vec{j}$

$$div rot\overline{H} = div\vec{j} \qquad (26),$$

$$div\, rot\overline{H} = 0 \text{ - из векторного анализа} \qquad (27)$$

Подставляя (27) в (26), получим, что $div\vec{j} = 0$ и $\oint_S \vec{j}\,d\overline{S} = 0$, т.е. поток $\vec{j}$ через замкнутую поверхность ($\oint_S$) равен 0, значит нигде нет ни начала, ни конца линий $\vec{j}$ как показано на рис.1.



Сколько линий входит в объем, столько и выходит.

Следствия из уравнений Максвелла

2 пример

Используя уравнения Максвелла, вывести уравнения непрерывности и закон сохранения заряда

$$rot\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \qquad div\,rot\,\vec{H} = div(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}) \equiv 0$$

Уравнения непрерывности

$$div\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \oint_S \vec{j}d\vec{S} + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV = 0 \tag{28}$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV + \int_V div\vec{j}dV = 0,\ \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV = \frac{\partial q}{\partial t},\ \int_V div\,\vec{j}dV = \int_S \vec{j}d\vec{S} = I$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -I \qquad \text{Закон сохранения заряда} \tag{29}$$

3 пример

Доказать, что в однородной проводящей среде не может существовать объемное распределение заряда, не зависящее от времени.

Вопрос 1. Какое математическое соотношение может описывать утверждение, сформулированное в данной задаче?

Ответ: Объемная плотность заряда описывается величиной ρ. Нам, очевидно, нужно доказать, что если в какой-либо точке ρ≠0, то при этом обязательно и dρ/dt≠0.

Записать уравнение Максвелла, в которое входит объемная плотность заряда

$$div\overline{D} = \rho$$

Но сюда входит $\overline{D}$, чтобы получить уравнение для ρ надо исключить $\overline{D}$, поэтому, мы должны использовать уравнение, в которое входит $\overline{D}$

$$\vec{j} = \sigma\overline{E} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t},\ \text{но т. к.}\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E},\ \text{то}\ \vec{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\overline{D} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{D} + \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{30}$$

Вектор $\vec{j}$ исключим, взяв div от обоих частей уравнения

$div\vec{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon}div\overline{D} + \frac{\partial}{\partial t}div\overline{D},\ т.к.\ div\vec{j} = 0, div\overline{D} = \rho$, откуда следует уравнение

$$\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{30a}$$

Ели ρ≠0, то $\frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0$. Произведя разделение переменных, получим

$$\frac{\partial\rho}{\rho} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\partial t \qquad (31)$$

Из уравнения (31) определяем ρ. Оно равно

$$\rho = \rho_{\circ} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \qquad (32)$$

Ответ: $\rho = \rho_{\circ} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$.

Определение ЭДС в контуре
4 пример

Определить ЭДС, возбуждаемую в рамке потоком вектора $\overline{B} = \mu \overline{H}_{\circ} \cos\omega t$. Направление вектора $\overline{H}$ показано на рис.2.

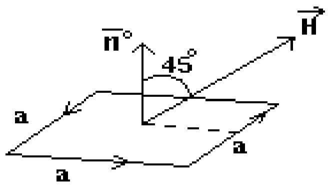


Рис.2

Решение:

Для определения потока, воспользуемся уравнением (15) и зная, что скалярное произведение векторов равно

$$\vec{B}\cdot\vec{n}^{0} = \left|\vec{B}\right|\left|\vec{n}^{0}\right|\cos 45^{0}$$

запишем значение для потока, проделав необходимые преобразования.

$$\Phi = \int\limits_{S}\overline{B}d\overline{S} = \int\limits_{S}\overline{B}\overline{n}^{\circ}dS = \cos 45^{\circ}\int\limits_{S}BdS = \cos 45^{\circ}B\int\limits_{S}dS = \frac{1}{\sqrt{2}}\mu\overline{H}_{\circ}\cos\omega t\cdot a^{2}$$

Электродвижущая сила определяется из уравнения

$$E_{i} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (33)$$

Подставим в (33) значение потока

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\mu H_{\circ}\sin\omega t\cdot a^2$$

Ответ: $E_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\mu H_{\circ}\sin\omega t\cdot a^2$.

Применение граничных условий
5 пример

Имеются две полубесконечные магнитные среды, 1-ая- изотропная, 2-ая- анизотропная. Проводимости равны нулю. Параметры сред:

$\mu_1 = \mu_0; \mu_2 = \begin{bmatrix} \mu_0 & -\alpha & 0 \\ +\alpha & \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$.

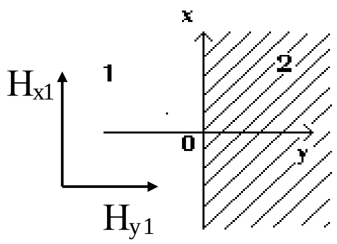


Рис. 3

Магнитное поле в первой среде: $\overline{H} = \bar{x}^{\circ}H_{x1} + \bar{y}^{\circ}H_{y1}$. Определить магнитное поле во второй среде.

Решение:

Согласно рис.3 и граничным условиям (20), записываем связь между параметрами первой и второй среды

$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \rightarrow H_{x1} = H_{x2} \qquad (34),$$

$$B_{1n} = B_{2n} \rightarrow \mu_0 H_{1y} = B_{2n} \qquad (35),$$

$$B_{2n} = B_{2y}; B_{1n} = B_{1y}; B_{1y} = B_{2y} \qquad (36)$$

Так как во второй среде магнитная проницаемость представлена тензором, то запишем вектор магнитной индукции для второй среды через материальное уравнение (12) в виде произведения двух определителей и перемножим их

$$\overline{B}_2 = \begin{bmatrix} B_{x2} \\ B_{y2} \\ B_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 & -\alpha & 0 \\ +\alpha & \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{x2} \\ H_{y2} \\ H_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 H_{x2} - \alpha H_{y2} \\ \alpha H_{x2} + \mu_0 H_{y2} \\ \mu_z H_{z2} \end{bmatrix} \qquad (37)$$

Теперь из уравнения (37) выделим составляющую B_{y2} и приравняем ее, следуя условиям (35,36), запишем

$$B_{2y} = \alpha H_{x2} + \mu_0 H_{y2} = B_{1y} = \mu_0 H_{1y}$$

Из выражения (34) следует, что $H_{x2} = H_{x1}$ тогда используя составляющую B_{x2}, составляем еще одно уравнение

$$\alpha H_{x1} + \mu_0 H_{y2} = \mu_0 H_{1y}$$

из которого тоже можно найти H_{y2}

$$H_{y2} = \frac{1}{\mu_0}(\mu_0 H_{1y} - \alpha H_{x1}); \quad H_{2z} = H_{1z} = 0 \Rightarrow \overline{H}_2 = \overline{x}^\circ H_{x1} + \overline{y}^\circ (H_{y1} - \frac{\alpha}{\mu_0} H_{x1})$$

Ответ: $\overline{H}_2 = \overline{x}^\circ H_{x1} + \overline{y}^\circ (H_{y1} - \frac{\alpha}{\mu_0} H_{x1})$.

6 пример

Имеются две полубесконечные среды с параметрами:

$\varepsilon_1 = \varepsilon_0; \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon_0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon_0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$; зарядов нет. Задано $\overline{E}_1 = \overline{x}^\circ E_{1x} + \overline{y}^\circ E_{1y}$. Определить $\overline{E}_2$.

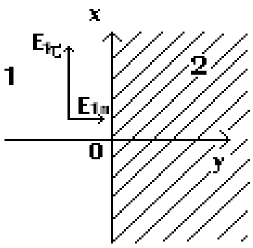


Рис.4

Решение:

Эта задача подобна задаче №5, только определения проводятся для напряженности электрического поля с использованием соответствующих граничных условий из уравнений (20) и материальных уравнений (11)

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \to E_{1x} = E_{2x}; D_{1y} = D_{2y}, D_{1n} = D_{n2}$$

$$\overline{D}_2=\begin{bmatrix}D_{2x}\\D_{2y}\\D_{2z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon & 0 & \varepsilon_0\\0 & \varepsilon & 0\\\varepsilon_0 & 0 & \varepsilon\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}E_{2x}\\E_{2y}\\E_{2z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon E_{2x}+\varepsilon_0 E_{2z}\\\varepsilon E_{2y}\\\varepsilon_0 E_{2x}+\varepsilon E_{2z}\end{bmatrix}$$

$$D_{1y}=D_{2y}\to\varepsilon_0 E_{1y}=\varepsilon E_{2y};E_{2y}=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}E_{1y}\Rightarrow\overline{E}_2=\overline{x}^\circ E_{1x}+\overline{y}^\circ\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}E_{1y}$$

Ответ: $\overline{E}_2=\overline{x}^\circ E_{1x}+\overline{y}^\circ\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}E_{1y}$.

7 пример

Дано электромагнитное поле с неизменным направлением вектора **E**. Показать, что **E** и **B** взаимно ортогональны.

Решение: Найдем **B** по заданному **E**

Направим одну из осей координат по направлению вектора **E**. Например **z**, тогда E_x и E_y=0. Воспользуясь 2-м уравнением Максвелла (6).

Записываем выражение rot в декартовой системе координат

$$rot\overline{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$rot\overline{E}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 0 & 0 & Ez\end{vmatrix}=-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{x}_0B_X+\vec{y}_0B_Y+\vec{z}_0B_Z)$$, т. к.

$$E_X=E_Y=0$$, то

$$rot_X E=\frac{\partial E_Z}{\partial y}=-\frac{\partial B_X}{\partial t},\ rot_Y E=-\frac{\partial E_Z}{\partial x}=-\frac{\partial B_Y}{\partial t},\ rot_Z E=0=-\frac{\partial B_Z}{\partial t}$$

откуда $B_Z=0$. Следовательно $\overline{B}=\vec{x}_0B_X+\vec{y}_0B_Y$.

Берем скалярное произведение

$$\left(\overline{E}\overline{B}\right)=\left(\vec{z}_0E_Z\overline{B}\right)=(\vec{z}_0\vec{x}_0B_XE_Z+\vec{z}_0\vec{y}_0B_YE_Z)\cos\left(\vec{z}_0\vec{y}_0\right)=0$$
$$\left\{E_z\vec{z}_0\cdot\left(\vec{x}_0B_x+y_0B_y\right)\right\}=0$$

Следовательно $\overline{E}\perp\overline{B}$.

8 пример

Какова напряженность магнитного поля на расстоянии 10см от прямолинейного постоянного провода с током в 2А (Рис.8)

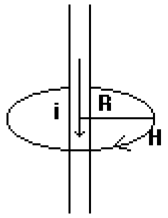


Рис. 8

Решение:

Воспользуемся 1-м уравнением Максвелла в интегральной форме $\oint\limits_L \vec{H} d\vec{l} = I$. Ток прямолинеен. Мы доказали, что $\vec{H} \perp \vec{j}$ (задача 13) следовательно, линии вектора **H** лежат в плоскости перпендикулярной направлению тока, и имеют вид замкнутых кривых.

Ток прямолинеен, а мы доказали, что $\overline{H} \perp \vec{j}$, следовательно, линии вектора **H** лежат в плоскости $\perp$ направлению тока и имеют вид замкнутых кривых. Замкнутым контуром введем окружность, по которой будем считать циркуляцию.

$$d\vec{l} = \vec{\alpha}_0 \cdot r d\alpha, \quad \vec{H} = \vec{\alpha}_0 H_\alpha + \vec{r}_0 \cdot H_r, \quad \vec{H} d\vec{l} = H_\alpha d\alpha$$

H_α - постоянная величина на расстоянии r

$$H \int\limits_{2\pi R} dl = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi R} = \frac{2A}{6.28 \cdot 0.10 м} = 3.3 \, ^{A}\!/_{м}$$

Вектор **H** при выбранном направлении тока направлен по часовой стрелке, т. к. составляет правовинтовую систему.

9 пример

Электронный поток в электроннолучевой трубке имеет радиус **a**=1мм (**a**<<**l**- длина трубки) и объемную плотность **ρ**=$3\cdot10^{-8}$ к/м^3, движется со скоростью $\upsilon=5\cdot10^7$ м/с. Какой величины ток в трубке?

Решение:

$$I_{пер} = \rho \cdot \upsilon \cdot S, \qquad S = \pi a^2 = 3.14 \cdot 10^{-6} (м^2),$$

$$S \cdot \rho = 3.14 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-8} = 9{,}42 \cdot 10^{-14} (Кл / м),$$

$$i_{пер} = 9.42 \cdot 10^{-14} \cdot 5 \cdot 10^7 = 4.71 \cdot 10^{-6} (A).$$

10 пример

В некотором объеме свободного пространства имеется электрическое поле $\overline{E} = 10\overline{y}°(В/м)$ и магнитное поле $\overline{H} = 15\overline{x}°(А/м)$. Заряд q=$10^{-9}$(Кл) влетает в этот объем со скоростью $\overline{\upsilon} = 10^6\overline{z}°(м/с)$. Определить силу, действующую на заряд, и её направление.

Решение:

$$\mu_{\circ} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,(Гн/м), \qquad \overline{F} = q\left\{\overline{E} + \left[\overline{\upsilon} \times \overline{B}\right]\right\}$$

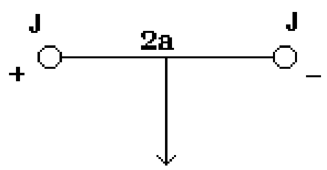
$$\vec{F}_э = q\vec{E} = 10^{-9} \cdot 10 \cdot \overline{y}° = 10 \cdot 10^{-9}\,\overline{y}°,$$

$$F_м = q\left[\overline{\upsilon} \times \overline{B}\right] = q\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 10^6 \\ 15 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 18.84 \cdot 10^{-9}\,\overline{y}°$$

$$\vec{F} = \vec{F}_э + \vec{F}_м = 28.84 \cdot 10^{-9}\,\overline{y}°(H).$$

11 пример

Какова величина напряженности магнитного поля в середине между двумя параллельными бесконечными проводниками, по которому текут одинаковые, но противоположно направленные токи?



Решение:

$$H = \frac{I}{2\pi a}$$

Поле двух разнонаправленных, но одинаковой величины токов по принципу суперпозиции

$$H_{\Sigma} = H_1 + H_2 = 2H_1 = \frac{2I}{2\pi a} = \frac{I}{\pi a}.$$

Расчет магнитной энергии

12 пример

Сердечник трансформатора выполнен из стали с плотностью 8,1 г/см^3 и имеет массу 3 кг. Амплитудное значение магнитной индукции 1,85 Тл, относительная магнитная проницаемость стали
μ =220. Найдите максимальное значение энергии, запасенной в сердечнике, при намагничивании его синусоидальным током.

Решение:

Удельная энергия магнитного поля определяется соотношением

$$\varpi_н = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} \tag{38}$$

Интегрируя по объему сердечника (38) получим полную энергию магнитного поля

$$\int_V \varpi_н dV \tag{39}$$

Но объем не задан, его следует определить, поделив массу m сердечника на плотность ($\rho_н$)

$$v = \frac{m}{\rho_h}$$

Тогда энергия, запасаемая в сердечнике равна

$$W_H = \omega_н \cdot v = \frac{B^2 m}{\mu_0 \mu \cdot \rho_h} \tag{40}$$

Для данной задачи

$$W_н \frac{1{,}85^2 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 220 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8{,}1} = 2{,}294 \text{ Дж}$$