2.1.9 Примеры решения задач

1 пример

Определить максимальную скорость υ_{max} фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda = 0{,}155 мкм$.

Решение. Максимальную скорость фотоэлектронов можно определить из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\varepsilon = A + T_{max} \tag{1}$$

где ε – энергия фотонов, падающих на поверхность металла;

А – работа выхода;

T_{max} – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

Энергия фотона вычисляется также по формуле

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} \tag{2}$$

где h – постоянная Планка;

c – скорость света в вакууме;

λ – длина волны.

Кинетическая энергия электрона может быть выражена или по классической формуле

$$T = \frac{m_0 \upsilon^2}{2} \tag{3}$$

или по релятивистской формуле

$$T = E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \tag{4}$$

где $\beta = \dfrac{\upsilon}{c}$.

В зависимости от того, какая скорость сообщается фотоэлектрону. Скорость фотоэлектрона зависит от энергии фотона, вызывающего фотоэффект: если энергия ε много меньше энергии покоя E_0 электрона, то может быть применена формула (3), если же ε сравнима по величине с E_0, то вычисление по формуле (3) приводит к ошибке, поэтому нужно пользоваться формулой (4).

Вычислим энергию фотона ультрафиолетового излучения по формуле (2)

$$\varepsilon = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}55 \cdot 10^{-7}} Дж = 1{,}28 \cdot 10^{-18} Дж$$

или

$$\varepsilon = \frac{1,28 \cdot 10^{-18}}{1,6 \cdot 10^{-19}} эB = 8эB$$

Полученная энергия фотона (8эВ) много меньше энергии покоя электрона (0,51МэВ). Следовательно, для данного случая кинетическая энергия фотоэлектрона в формуле (1) может быть выражена по классической формуле (3)

$$\varepsilon = A + \frac{m_0 \upsilon_{max}^2}{2}$$

откуда

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\frac{2(\varepsilon - A)}{m_0}} \qquad (5)$$

Проверим, дает ли полученная формула единицу скорости. Для этого в правую часть формулы (5) вместо символов величин подставим обозначения единиц

$$\left(\frac{[\varepsilon - A]}{[m_0]}\right)^{1/2} = \left(\frac{1Дж}{1кг}\right)^{1/2} = \left(\frac{1кг \cdot м^2 / c^2}{1кг}\right)^{1/2} = 1\frac{м}{c}$$

Найденная единица является единицей скорости.

Подставив значения величин в формулу (5), найдем

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(1,28 \cdot 10^{-18} - 0,75 \cdot 10^{-18}\right)}{9,11 \cdot 10^{-31}}} \frac{м}{c} = 1,08 \cdot 10^6 \frac{м}{c}$$

2 пример

Определить начальную активность A_0 радиоактивного препарата магния ^{27}Mg массой $m = 0,2$ $мкг$, а также его активность А через время t=6 ч. Период полураспада $T_{1/2}$ магния считать известным.

Решение. Активность А изотопа характеризует скорость радиоактивного распада и определяется отношением числа dN ядер, распавшихся за интервал времени dt, к этому интервалу

$$A = -\frac{dN}{dt} \qquad (1)$$

знак « - « показывает, что число N радиоактивных ядер с течением времени убывает.

Для того чтобы найти $\frac{dN}{dt}$, воспользуемся законом радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \qquad (2)$$

где N - число радиоактивных ядер, содержащихся в изотопе, в момент времени t;

N_0 - число радиоактивных ядер в момент времени, принятый за начальный (t=0);

λ - постоянная радиоактивного распада.

Продифференцируем выражение (2) по времени

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N_0 t^{-\lambda t} \qquad (3)$$

Исключив из формул (1) и (3) $\frac{dN}{dt}$, находим активность препарата в момент времени t

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \qquad (4)$$

Начальную активность A_0 препарата получим при t=0

$$A_0 = \lambda N_0 \qquad (5)$$

Постоянная радиоактивного распада λ связана с периодом полураспада $T_{1/2}$ соотношением

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \qquad (6)$$

Число N_0 радиоактивных ядер, содержащихся в изотопе, равно произведению постоянной Авогадро N_A на количество вещества ν данного изотопа

$$N_0 = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A \qquad (7)$$

где m-масса изотопа; M - молярная масса.

С учетом выражений (6) и (7) формулы (5) и (4) принимают вид

$$A_0 = \frac{m}{M} \cdot \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_A \qquad (8)$$

и

$$A = \frac{m}{M} \cdot \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_A e^{\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} \qquad (9)$$

Произведем вычисления, учитывая, что $T_{1/2}$= 10 мин=600 с, ln2=0,693

$$t = 6ч = 6 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3 с = 2{,}16 \cdot 10^4 с$$

$$A_0 = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{0{,}693}{600} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} Бк = 5{,}13 \cdot 10^{12} Бк = 5{,}13 \quad ТБк$$

$$A = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{0{,}693}{600} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot e^{-\frac{0{,}693}{600} \cdot 2{,}16 \cdot 10^4} Бк = 81{,}3 \quad Бк$$

3 пример

Какая доля от падающей световой интенсивности поглощается в слое полупроводника между координатами $x_1 = 10^{-6}$ см до $x_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ см, отсчитанными от освещаемой поверхности, если известно, что длина свободного пробега фотона составляет 10^{-8} м?

Решение.

За основу решения задачи возьмем закон Бугера–Ламберта, согласно которому интенсивность оптического излучения на расстоянии *x* от освещаемой поверхности $I(x)$ уменьшается с ростом глубины по экспоненциальному закону:

$$I(x) = (1 - R) \cdot I_0 \, exp(-\alpha x) \qquad (1)$$

где R – коэффициент отражения излучения от поверхности, а α – коэффициент поглощения, который по величине обратно пропорционален длине свободного пробега фотона $\ell_ф$

$$\alpha = \frac{1}{\ell_ô}$$

Значит, в точке $x_1 = 10^{-6}$ см интенсивность света будет равна

$$I(x_1) = I_0 \exp(-\alpha x_1)$$

Эта доля интенсивности от падающего на полупроводник излучения, пройдя слой вещества до точки $x_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ см, уменьшится до

$$I(x_2) = I_0 \, exp(-\alpha x_1) \cdot exp(-\alpha x_2) = I_0 \, exp(-\alpha (x_1 + x_2))$$

Следовательно, в слое толщиной $(x_2 - x_1)$ поглотится интенсивность

$$\Delta I(x_2 - x_1) = I(x_1) - I(x_2) = I_0 \exp(-\alpha x_1) - I_0 \exp(-\alpha(x_1 + x_2)) =$$
$$= I_0 \exp(-\alpha x_1) \cdot [1 - \exp(-\alpha x_2)]$$

или в относительных единицах

$$\frac{\Delta I(x_2 - x_1)}{I_0} = exp(-\alpha x_1) \cdot [1 - exp(-\alpha x_2)]$$

Подставляя численные значения в сантиметрах, получим

$$\frac{\Delta I(x_2 - x_1)}{I_0} = \exp(-10^6 \cdot 10^6)[1 - \exp(-10^6 \cdot (2 \cdot 10^{-6} - 10^6))] =$$
$$= \exp(-1)[1 - \exp(-1)] = \frac{1}{\exp(1)}\left[\frac{\exp(1) - 1}{\exp(1)}\right] = \frac{\exp(1) - 1}{(\exp(1))^2} \approx \frac{2{,}7 - 1}{2{,}7 \cdot 2{,}7} = \frac{1{,}7}{7{,}3} \approx 0{,}23$$

Ответ на поставленный в задаче вопрос таков: в указанном слое поглотится примерно 23% от падающей интенсивности.

4 пример

Длина волны, а которую приходится максимум энергии в спектре излучения черного тела, $\lambda_0 = 0{,}58 мкм$. Определить энергетическую светимость (излучательность) R_e поверхности тела.

Решение. Энергетическая светимость R_e абсолютно черного тела в соответствии с законом Стефана-Больцмана пропорциональна четвертой степени термодинамической температуры и выражается формулой

$$R_e = \sigma T^4 \qquad (1)$$

где σ - постоянная Стефана-Больцмана;

T - термодинамическая температура.

Температуру T можно вычислить с помощью закона смещения Вина

$$\lambda_0 = \frac{b}{T} \qquad (2)$$

где b – постоянная закона смещения Вина.

Используя формулы (2) и (1), получаем

$$R_e = \sigma\left(\frac{b}{\lambda_0}\right)^4 \qquad (3)$$

Произведем вычисления

$$R_e = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \left(\frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{5{,}8 \cdot 10^{-7}} \right)^4 \frac{Вт}{м^2} = 3{,}54 \cdot 10^7 \frac{Вт}{м^2} = 35{,}4 \frac{МВт}{м^2}$$