2.1.12 Примеры решения задач

1 пример

Точка совершает гармонические колебания с частотой ν = 10 Гц. В момент принятый за начальный, точка имела максимальное смещение x_{max} = 1 мм. Написать уравнение колебаний точки и начертить их график.

Решение.

Уравнение колебаний точки можно записать в виде

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2\cos^2\alpha}\ \frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2\cos^2\alpha}\ \frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2\cos^2\alpha} \qquad (1)$$

или

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_2) \qquad (2)$$

где А – амплитуда колебаний;

ω – циклическая частота;

t – время; φ_1 и φ_2 – начальные фазы, соответствующие форме записи (1) или (2).

По определению амплитуда колебаний

$$A = x_{max} \qquad (3)$$

Циклическая частота ω связана с частотой ν соотношением

$$\omega = 2\pi\nu \qquad (4)$$

Начальная фаза колебаний зависит от формы записи. Если использовать форму (1), то начальную фазу можно определить из условия: в момент t = 0

$$x_{max} = A\sin\varphi_1$$

откуда

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{x_{max}}{A} = \arcsin 1$$

или

$$\varphi_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2}(k = 0,1,2,3,...)$$

Изменение фазы колебаний на 2π не изменяет состояния колебательного движения, поэтому можно принять

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} \qquad (5)$$

В случае второй записи получаем

$$\varphi_2 = \arccos\frac{x_{\max}}{A} = \arccos 1$$

или

$$\varphi_2 = 2\pi k(k = 0,1,2,3,...)$$

По тем же соображениям, что и в первом случае, находим

$$\varphi_2 = 0 \qquad (6)$$

С учетом равенств (3) – (6) уравнения колебаний примут вид

$$x = x_{\max}\sin(2\pi\nu t + \frac{\pi}{2})$$

или

$$x = x_{\max}\cos 2\pi\nu t$$

где x_{max} = 1 мм = 10^{-3} м;
ν = 10 Гц.

График соответствующего гармонического колебания приведен на рис.1.

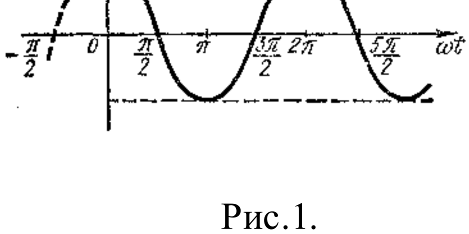

Рис.1.

2 пример

Складываются два колебания одинакового направления, выраженные уравнениями:

$$x_1 = A_1 \cos\frac{2\pi}{T}(t+\tau_1);$$

$$x_2 = A_2 \cos\frac{2\pi}{T}(t+\tau_2)$$

где A_1 = 3 см;
A_2 = 2 см;
τ_1 = 1/6 с;
τ_2 = 1/3 с;
T = 2 с.

Построить векторную диаграмму сложения этих колебаний и написать уравнение результирующего колебания.

Решение. Для построения векторной диаграммы сложения двух колебаний одного направления надо фиксировать какой-либо момент времени. Обычно векторную диаграмму строят для момента времени
t = 0, преобразовав оба уравнения к канонической форме $x = A\cos(\omega t+\varphi)$. Получим

$$x_1 = A_1 \cos(\frac{2\pi}{T}t+\frac{2\pi}{T}\tau_1);$$

$$x_2 = A_2 \cos(\frac{2\pi}{T}t+\frac{2\pi}{T}\tau_2)$$

Отсюда видно, что оба складываемых гармонических колебания имеют одинаковую циклическую частоту

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (1)$$

Начальные фазы φ_1 первого и φ_2 второго колебаний соответственно равны:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{T}\tau_1 \qquad (2),$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{T}\tau_2 \qquad (3)$$

Подставим числовые значения в формулы (1) – (3) и произведем вычисления

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2}c^{-1} = 3{,}14c^{-1}$$

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{2}\frac{1}{6}\text{рад} = 30^0, \qquad \varphi_2 = \frac{2\pi}{2}\frac{1}{3}\text{рад} = 60^0$$

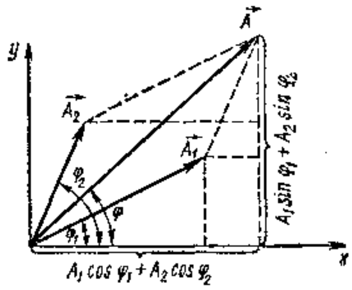

Рис.2.

На рис.2 изобразим векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$. Для этого отложим отрезки длиной A_1 = 3 см и A_2 = 2 см под углами $\varphi_1 = 30^0$ и $\varphi_2 = 60^0$ к оси x. Результирующее колебание будет происходить с той же частотой ω и

амплитудой $\vec{A}$, равной геометрической сумме складываемых амплитуд $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

Согласно теореме косинусов

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \tag{4}$$

Начальную фазу результирующего колебания можно также определить непосредственно из векторной диаграммы

$$\varphi = arctg\,\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \tag{5}$$

Подставим числовые значения величин в формулы (4) и (5) и произведем вычисления

$$A = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2*3*2\cos(60^0 - 30^0)}\ \text{см} = 4{,}84\ \text{см}.$$

$$\varphi = arctg\frac{3\sin 30^0 + 2\sin 60^0}{3\cos 30^0 + 2\cos 60^0} = arctg 0{,}898 = 42^0$$

или φ = 0,735 рад.

Так как результирующее колебание является гармоническим, имеет ту же частоту, что и складываемые колебания, то его можно записать в виде

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

где A = 4,84 см;

$\omega = 3{,}14\ с^{-1}$;

φ = 0,735 рад.

3 пример

Плоская волна распространяется вдоль прямой со скоростью v = 20 м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой, на расстояниях x_1 = 12 м и x_2 = 15 м от источника волн, колеблются с разностью фаз Δφ = 0,75 π. Найти длину волны λ, написать уравнение волны и найти смещения указанных точек в момент t = 1,2 с, если амплитуда колебаний A = 0,1 м.

Решение. Точки, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волны λ, колеблются с разностью фаз, равной 2π; точки, находящиеся друг от друга на любом расстоянии Δx, колеблются с разностью фаз, равной

$$\Delta\varphi = (\Delta x/\lambda)2\pi = ((x_2 - x_1)/\lambda)2\pi.$$

Решая это равенство относительно λ, получим

$$\lambda = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}(x_2 - x_1)$$

Подставив числовые значения величин, входящих в выражение для λ, и выполнив арифметические действия, получим

$$\lambda = \frac{2\pi}{0{,}75\pi}(15 - 12)\text{м} = 8\ \text{м}.$$

Для того чтобы написать уравнение плоской волны, надо еще найти циклическую частоту ω. Так как $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ (T – период колебаний) и $T = \dfrac{\lambda}{v}$, то

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$$

Произведя вычисления, получим

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 20}{8} \text{ с}^{-1} = 2\pi \text{ с}^{-1}$$

Зная значение амплитуды А колебаний, циклической частоты ω и скорости v распространения волны, можно написать уравнение плоской волны для данного случая

$$y = A cos\omega(t - \frac{x}{v})$$

где A = 0,1 м;

ω = 2π с$^{-1}$;

v = 20 м/с.

Чтобы найти смещение у указанных точек, достаточно в это уравнение подставить заданные значения t и x

$$y_1 = 0{,}1\cos 5\pi\left(1{,}2 - \frac{12}{20}\right)\text{м} = 0{,}1\cos 3\pi\ \text{м} = \text{-}\ 0{,}1\text{м};$$

$$y_2 = 0{,}1\cos 5\pi\left(1{,}2 - \frac{15}{20}\right)\text{м} = 0{,}1\cos 2{,}25\pi\ \text{м} = 0{,}071\text{м} = 7{,}1\text{см}$$