2.3 Уравнения Пуассона и Лапласа

Связь между зарядом и напряженностью в рассматриваемой точке определяется по теореме Гаусса. В дифференциальной форме она имеет вид:

$$\mathbf{divE} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}}; \qquad \text{или } \nabla\mathbf{E} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}}. \qquad (*)$$

$\mathbf{E} = -\,\mathbf{grad}\boldsymbol{\varphi}$, или $\mathbf{E} = -\,\nabla\varphi$, подставив в (*) получим:

$$\nabla\mathbf{E} = \nabla(-\nabla\varphi) = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}}; \quad => \quad -\nabla^2\varphi = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}}, \text{ откуда}$$

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}}, \qquad \text{или } \mathbf{divgrad}\boldsymbol{\varphi} = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}}. \qquad (2.14)$$

Уравнение (2.14) называется уравнением Пуассона, которое применяется для определения закона распределения потенциала внутри объема, занятого зарядами.

Если внутри объема зарядов нет $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$, то в этом частном случае получаем уравнение Лапласа, которое применяется для определения закона распределения потенциала внутри объема, не занятого зарядами.

$$\nabla^2\varphi = \mathbf{0}. \qquad (2.15)$$