2.4 Граничные условия в электростатическом поле

На поверхности проводящих тел. Рассмотрим границу раздела заряженный проводник-диэлектрик (рисунок 2.3). В проводящей среде $\boldsymbol{\delta} = 0$, $\gamma \neq 0$. В диэлектрике $\boldsymbol{\delta} = 0$, $\gamma = 0$. γ – проводимость среды. Вектор плотности тока $\boldsymbol{\delta}$ на поверхности и внутри проводника равен нулю, так как поле электростатическое - нет движущихся зарядов (нет электрического тока).

$\boldsymbol{\delta} = \gamma\mathbf{E}$, отсюда следует внутри проводящей среды $\mathbf{E}=0$.

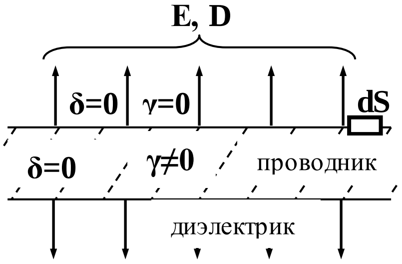

Рисунок 2.3

Из $E = -\operatorname{grad}\varphi$ следует, что при $E=0$ потенциал всех точек проводника одинаковый, $\varphi = \text{const}$. Поэтому линии напряженности E (силовые линии) нормальны к поверхности проводника, следовательно $E_\tau = 0$.

Если на поверхности проводника выделить элементарную площадь dS и применить постулат Максвелла $\oint_S DdS = g = \sigma S$, то получим $D=\sigma$.

Вектор электростатического смещения D на поверхности проводящих тел равен поверхностной плотности зарядов σ

Граничные условия на поверхности проводящих тел:

$$\mathbf{E_\tau = 0;\ \ D=\sigma.} \tag{2.16}$$

На поверхности раздела двух диэлектриков. Рассмотрим поверхность раздела двух диэлектриков с разными диэлектрическими проницаемостями $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ и $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ (рисунок 2.4).

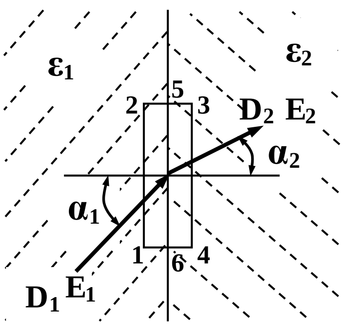

Рисунок 2.4

Пусть силовые линии (линии напряженности) направлены под углом $\boldsymbol{\alpha}$ от нормали к поверхности раздела диэлектриков (рисунок 2.4). Определим количественные соотношения на границе раздела между $\mathbf{D_1}$, $\mathbf{D_2}$ и $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$. Для этого на границе раздела выделим замкнутую поверхность 1, 2, 5, 3, 4, 6, 1. Тогда согласно формуле (2.2) имеем:

$$\oint_{1253461} \mathbf{E}\,\partial\ell = \mathbf{0}.$$

Проинтегрируем вдоль контура

$$\oint_{1253461} \mathbf{E}\,\partial\ell = \mathbf{E_1\sin\alpha_1\ell_{12} + E_1\cos\alpha_1\ell_{25} + E_2\cos\alpha_2\ell_{53} - E_2\sin\alpha_2\ell_{34} - E_2\cos\alpha_2\ell_{46} - E_1\cos\alpha_1\ell_{61} = 0.}$$

Так как $\ell_{25} = \ell_{61}$ и $\ell_{53} = \ell_{64}$, то после сокращения слагаемых получим

$$\mathbf{E_1\sin\alpha_1 = E_2\sin\alpha_2.} \tag{2.16}$$

Введем обозначения: $\mathbf{E_1\sin\alpha_1 = E_{\tau_1}}$; $\mathbf{E_2\sin\alpha_2 = E_{\tau_2}}$;

$\mathbf{E_{\tau_1}}$ и $\mathbf{E_{\tau_2}}$ - тангенциальные составляющие векторов $\mathbf{E_1}$ и $\mathbf{E_2}$, следовательно:

$$\mathbf{E_{\tau_1} = E_{\tau_2}}. \tag{2.17}$$

Уравнение (2.17) есть граничное условие:

тангенциальные составляющие векторов напряженности электростатического поля на границе раздела двух сред равны .

Для определения количественного соотношения между векторами **D** выделим на границе раздела двух сред замкнутую поверхность в виде параллелепипеда, след которого изображен прямоугольником 1, 2, 3, 4, 1 на рисунке 2.4.

Поскольку внутри объема свободных зарядов нет, то согласно (1.15) получим

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot \mathbf{dS} = 0.$$

Площади граней 2-3 и 1-4 равны и бесконечно малы, а площади граней 1-2 и 2-4 обозначим соответственно $\mathbf{S_1}$ и $\mathbf{S_2}$, тогда, раскрывая интеграл, получим:

$$-\mathbf{D_1\cos\alpha_1 S_1 + D_2\cos\alpha_2 S_2 = 0}.$$

$$\mathbf{D_1\cos\alpha_1 = D_2\cos\alpha_2}.$$

$$\mathbf{D_{1n} = D_2\cos\alpha_2}.$$

$$\mathbf{D_{n_1} = D_{n_2}} \qquad (2.18)$$

Уравнение (2.18) есть граничное условие:

нормальные составляющие векторов смещения на границе раздела двух сред в электростатическом поле равны.

Разделив (2.16) на (2.18), получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{E_1\,\mathbf{sin}\alpha_1}{D_1\,\mathbf{cos}\alpha_1} &= \frac{E_2\,\mathbf{sin}\alpha_2}{D_2\,\mathbf{cos}\alpha_2};\\ \frac{E_1\,\mathbf{sin}\alpha_1}{\varepsilon\varepsilon_1 E_1\,\mathbf{cos}\alpha_1} &= \frac{E_2\,\mathbf{sin}\alpha_2}{\varepsilon\varepsilon_2 E_2\,\mathbf{cos}\alpha_2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}; \qquad (2.19)$$

Уравнение (2.19) характеризует количественную связь между векторами **D**, **E** и диэлектрическими проницаемостями на границе раздела двух сред.

Проанализируем полученные соотношения.

1. ***Если векторы E и D перпендикулярны*** к поверхности раздела двух сред, угол $\alpha = 0$ (рисунок 2.5) . В этом случае при $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ $\mathbf{D_{n_1} = D_{n_2}}$ или $\mathbf{D_1 = D_2}$ так как $\cos\alpha = 1$.

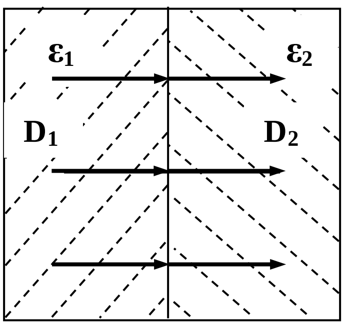

Рисунок 2.5.

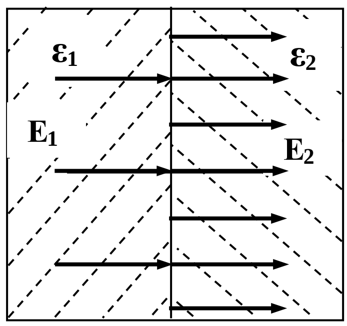

Рисунок 2.6.

В этом случае, при переходе границы раздела происходит скачкообразное изменение величины **E**. Это следует из соотношений:

$$\mathbf{D_1 = D_2}; \quad \boldsymbol{\varepsilon_1\varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_2\varepsilon_0 E_2}. \qquad \text{Отсюда} \quad \frac{\boldsymbol{\varepsilon_1}}{\boldsymbol{\varepsilon_2}} = \frac{\mathbf{E_1}}{\mathbf{E_2}}. \qquad (2.20)$$

Если $\boldsymbol{\varepsilon}_1 > \boldsymbol{\varepsilon}_2$, то $\mathbf{E}_2 > \mathbf{E}_1$. В данном случае граница раздела является как бы источником дополнительных силовых линий вектора **E** (рисунок 2.5). Это объясняется различной способностью к поляризации диэлектриков, помещенных в электростатическое поле.

Подобное свойство используется в электротехнической промышленности при изготовлении изоляции высоковольтных конденсаторов, трансформаторов.

2. ***Если векторы E и D не перпендикулярны*** к поверхности раздела двух сред (угол $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$), то соотношения (2.20) справедливы для нормальных составляющих вектора **E**, а именно: $\boldsymbol{\varepsilon}_1\mathbf{E}_{1n} = \boldsymbol{\varepsilon}_2\mathbf{E}_{2n}$.

Нормальные составляющие вектора напряженности электростатического поля на границе раздела двух диэлектриков обратно пропорциональны диэлектрическим проницаемостям сред.