

2.8 Поле шарового заряда

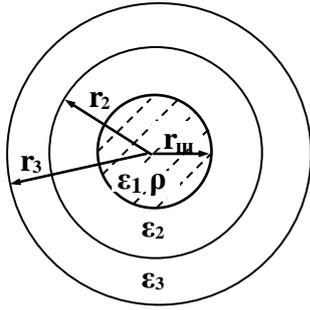


Рисунок 2.7

Требуется определить закон изменения параметров \mathbf{D} , \mathbf{E} и ϕ в функции от радиуса r .

Выводить закономерности удобнее в сферической системе координат.

В силу симметрии относительно центра сфер величины \mathbf{D} и \mathbf{E} будут зависеть только от радиальной составляющей, т.е. от радиуса r . При этом значения векторов \mathbf{D} и \mathbf{E} можно рассматривать как скалярную величину, поскольку их направление не меняется.

Суммарный заряд в пределах радиуса шара (при $0 \leq r \leq r_{\text{ш}}$) будет зависеть от объема шара, и его величина определяется по формуле:

$$q = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = V_{\text{ш}} \rho.$$

За пределами радиуса шара (при $r \geq r_{\text{ш}}$) величина заряда остается неизменной и равной:

$$q = \frac{4}{3} \pi r_{\text{ш}}^3 \rho.$$

Вектор электростатического смещения в исследуемой точке определим на основании постулата Максвелла:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho. \quad (2.23)$$

Закон изменения потенциала ЭСП определим из выражения для градиента потенциала:

$$\mathbf{q} \text{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\mathbf{E}_r = -\mathbf{E}. \quad (2.24)$$

Определим величины \mathbf{D} , \mathbf{E} и ϕ в разных областях.

Первая область, когда $0 \leq r \leq r_{\text{ш}}$.

$$\text{Из (2.23) получим: } \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \mathbf{D} \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho. \Rightarrow \mathbf{D}_1 = \frac{\rho r}{3}; \quad \mathbf{E}_1 = \frac{\rho r}{3\epsilon_0 \epsilon_1}.$$

Закон изменения потенциала определим из (2.24).

$$\phi_1 = -\int \mathbf{E}_1 d\mathbf{r} = -\int \frac{\rho r}{3\epsilon_0 \epsilon_1} d\mathbf{r} = \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0 \epsilon_1} + \mathbf{K}_1. \quad (2.25)$$

\mathbf{K}_1 – постоянная интегрирования.

Вторая область, когда $r_{ш} \leq r \leq r_2$.

$$D_2 = \frac{q}{S} = \frac{q}{4\pi r^2}; \quad E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2 r^2};$$

$$\varphi_2 = -\int E_2 dr = -\int \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2 r} + K_2. \quad (2.26)$$

Третья область, когда $r_2 \leq r \leq r_3$.

$$D_3 = \frac{q}{S} = \frac{q}{4\pi r^2}; \quad E_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_3 r^2};$$

$$\varphi_3 = -\int E_3 dr = -\int \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_3 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_3 r} + K_3. \quad (2.27)$$

Для определения постоянных интегрирования K_1 , K_2 , K_3 систему уравнений, характеризующих граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = r_{ш}, \quad \varphi_1 = \varphi_2; \\ \text{при } r = r_2, \quad \varphi_2 = \varphi_3; \\ \text{при } r = \infty, \quad \varphi_3 = 0; \end{array} \right\} \quad (2.28)$$

Подставив последнее уравнение из системы (2.28) в (2.27), получим, что $K_3 = 0$.

В соответствии со вторым уравнением системы (2.28) при $r_3 = r_2$ приравняем уравнения (2.26) и (2.27) и находим K_2 .

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2 r_2} + K_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_3 r_2}; \quad \Rightarrow \quad K_2 = \frac{q(\epsilon_2 - \epsilon_3)}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2\epsilon_3 r_2}.$$

По аналогии, решая совместно уравнения (2.25) и (2.26) получим выражение для K_1 :

$$-\frac{\rho r_{ш}^2}{6\epsilon_0\epsilon_1} + K_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2 r_{ш}} + \frac{q(\epsilon_2 - \epsilon_3)}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2\epsilon_3 r_{ш}}.$$

Из анализа уравнений 2.25÷2.27 следует, что изменение потенциала вне шарового заряда можно рассматривать как изменение потенциала от точечного заряда или заряда, сосредоточенного в центре шаровой поверхности.

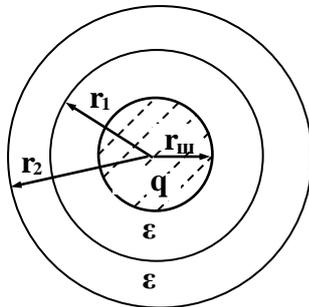


Рисунок 2.8.

Определим потенциалы двух шаровых поверхностей (рисунок 2.8), расположенных за пределами шарового заряда с радиусами r_1 и r_2 .

Потенциалы первой и второй поверхностей будут равны, соответственно:

$$\varphi_{r1} = \varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} + K_1;$$

$$\varphi_{r2} = \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2} + K_2.$$

Постоянные интегрирования K_1 и K_2 становятся равными нулю, если принять при $r = \infty$, $\varphi = 0$.

Согласно следствию теоремы единственности решения заменим эквипотенциальные поверхности с радиусами r_1 и r_2 тонкими проводящими

поверхностями. Тогда напряжение между двумя проводящими поверхностями будет равно

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\epsilon_0 r_2 r_1}. \quad (2.29)$$

Из формулы (2.29) следует, что проводящие поверхности, помещенные в электростатическое поле, заряжаются.

По рисунку 2.8 следует, что две проводящие поверхности, разделенные диэлектриком, являются сферическим конденсатором.

Если проводящим поверхностям сообщить заряды, равные по величине и противоположные по знаку, то напряжение между ними определяется по формуле (2.29), а емкость из соотношения:

$$C_{\text{сф.к}} = \frac{q}{U_{12}} = \frac{4\pi\epsilon_0 \epsilon r_2 r_1}{r_2 - r_1}. \quad (2.30)$$

Заряженный шар, окруженный проводящей поверхностью, является шаровым конденсатором с параметрами:

$$U_{\text{ш}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r_{\text{ш}}}; \quad C_{\text{ш}} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{\text{ш}}.$$

