2.10 Поле двух равномерно заряженных проводящих поверхностей

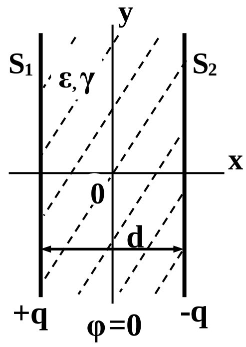


Рисунок 2.10.

Рассмотрим две тонкие плоские проводящие поверхности, отстоящие на расстоянии **d** друг от друга с параметрами:

$\mathbf{S_1 = S_2;\ q_1 = q_2;\ q_1 = \sigma S_1;\ q_2 = \sigma S_2}$.

Из постулата Максвелла, $\oint\limits_S \mathrm{DdS} = \mathrm{q}$, получим:

$\mathbf{D_1S_1 = D_2S_2}$; => $\boldsymbol{\sigma_1 S_1 = \sigma_2 S_2}$. При $\mathbf{S_1 = S_2}$.=>

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\sigma}. \qquad (2.31)$$

Отсюда из $\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon_o \varepsilon} \mathbf{E}$ получим для напряженности электростатического поля $\mathbf{E} = \dfrac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}} = \dfrac{\mathbf{D}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}}$. (2.32)

Из (2.31) следует, что векторы **D** и **E** в каждой точке поля, заключенной между параллельными проводящими плоскостями, имеют, соответственно, одно и то же значение, следовательно, поле является однородным.

Напряженность **E** в направлении перпендикулярном проводящим плоскостям (по направлению оси **x**) в соответствии с теоремой Гаусса и граничных условий будет:

$\mathbf{E} = \mathbf{E_x n^o} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{n^o}$, где $\mathbf{n^o}$ – единичный вектор, нормальный к поверхности **S**.

Или $\mathbf{E} = \mathbf{E_n} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}$.

Определим зависимость $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f(x)}$ из выражения $\mathbf{qrad}\boldsymbol{\varphi} = -\mathbf{E}$.

$$\boldsymbol{\varphi} = -\int \mathbf{E_x dx} = \frac{-\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}}\mathbf{x} + \mathbf{K}. \qquad (2.33)$$

Постоянную интегрирования **К** определим из граничных условий: при **x=0** => **φ=0**, из (13.33) получим **К=0**.

Так как **E = const**, окончательно получаем:

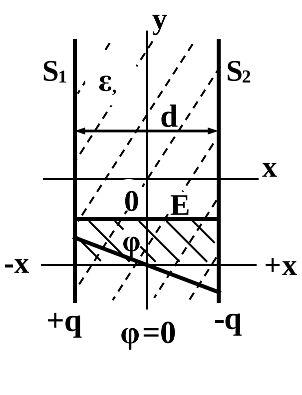
$$\boldsymbol{\varphi} = -\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}}\mathbf{x}. \qquad (2.34)$$

Падение напряжения между проводящими поверхностями:

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\varphi_+} - \boldsymbol{\varphi_-} = -\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}}\cdot\left(\frac{-\mathbf{d}}{\mathbf{2}}\right) - \left(\frac{-\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}}\cdot\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{2}}\right) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}}\cdot\mathbf{d} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{d}. \qquad (2.35)$$

Выразим поверхностную плотность заряда **σ** через приложенное напряжение U и подставим полученное выражение в (2.34), получим:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{d}}\cdot\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}; \quad \boldsymbol{\varphi} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{x}. \qquad (2.36)$$



Уравнение (2.36) есть уравнение эквипотенциальной поверхности (поверхности равного потенциала), которая проводится через равные расстояния параллельно поверхностям S.

Графики зависимости **E = f(x)** и **φ = f(x)** показаны на рисунке 2.11.

Рисунок 2.11.

Пример. Даны величины неподвижных зарядов (рис. 2.12), при этом алгебраическая сумма зарядов равна нулю.

$$\mathbf{q_1 + q_2 + \rho S d = 0}.$$

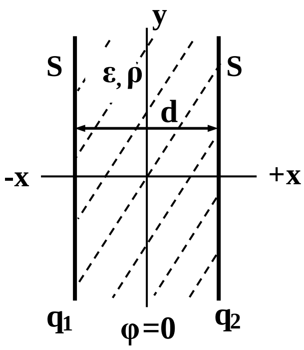


Рисунок 2.12.

Определим зависимость параметров **D**, **E** и **φ** в функции от расстояния.

Из $\mathbf{D \cdot S = \sum q}$; $\quad$ => $\quad \mathbf{D_1 = \dfrac{q_1 + \rho x S}{S}}$.

$$\mathbf{E_1 = \frac{q_1 + \rho x S}{\varepsilon\varepsilon_o S} = \frac{q_1}{\varepsilon\varepsilon_o S} + \frac{\rho x}{\varepsilon\varepsilon_o S}}.$$

$$\mathbf{\varphi = -\int E_x dx = \frac{-qx}{\varepsilon\varepsilon_o S} - \frac{-\rho x^2}{2\varepsilon\varepsilon_o} + K}.$$

$$\mathbf{U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q_1 d}{\varepsilon\varepsilon_o S} + \frac{\rho d^2}{2\varepsilon\varepsilon_o}}.$$

Определим закон изменения параметров **E** и **φ** в зависимости от **x** с применением уравнения Пуассона.

$$\nabla^2\varphi = \frac{-\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}}.$$

В прямоугольной системе координат оси **y** и **z** совпадают с плоскостями **S** проводящих пластин, поэтому **φ** не зависит от координат **y** и **x**. Получаем:

$$\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}} = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathbf{y}^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathbf{z}^2}\right) = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial \mathbf{x}^2}. \qquad (*)$$

Преобразуем уравнение (*)

$$\frac{\partial\left(-\dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{x}}\right)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}}. \quad => \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{x}} = \int \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}} \mathbf{dx} = \mathbf{E_x} = \mathbf{E} = \frac{\boldsymbol{\rho}\mathbf{x}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}} + \mathbf{K_1} \qquad (2.37)$$

$\mathbf{K_1}$ определим из начальных условий, т.е. при **x=0** имеем $\mathbf{E} = \dfrac{\mathbf{D}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}} = \dfrac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}}$.

Из теоремы Гаусса $\mathbf{E} = \dfrac{\mathbf{q}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}}$, подставив формулы в (2.37), получим:

$$\frac{\boldsymbol{\sigma_1}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}} = \frac{\mathbf{q}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}\mathbf{S}} = \mathbf{E} = \mathbf{K_1}.$$

Подставив $К_1$ в (2.37), окончательно получим:

$$\mathbf{E} = \frac{\boldsymbol{\rho}\mathbf{x}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}} + \frac{\mathbf{q}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}\mathbf{S}}. \qquad (2.38)$$

Из (2.37) определим закон изменения **φ**.

$$\varphi = -\int \mathbf{E_x dx} = \frac{-q_1\mathbf{x}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}\mathbf{S}} - \frac{-\boldsymbol{\rho}\mathbf{x}^2}{\mathbf{2}\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}} + \mathbf{K_2}\,.$$

При **x=0, φ=0 => К₂=0**. Отсюда

$$\varphi = \frac{-\mathbf{q_1 x}}{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}\mathbf{S}} - \frac{-\boldsymbol{\rho}\mathbf{x}^2}{\mathbf{2}\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}}\,. \qquad (2.39)$$

Емкость для рассматриваемой системы зарядов, $\mathbf{C} = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{U}} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon_o}\mathbf{S}}{\mathbf{d}}$.