

2.15 Метод зеркальных изображений

Это искусственный метод, основанный на том, что при расчете электростатических полей (ЭСП) с двумя и более диэлектриками с границей раздела правильной геометрической формы или полей, ограниченных проводящей поверхностью, кроме заданных зарядов вводят еще дополнительные заряды, величины и местоположение которых выбирают так, чтобы удовлетворять граничным условиям. Если граница раздела между средами плоская, то дополнительные заряды помещают там, где находятся зеркальные отображения заданных зарядов.

Этот метод есть следствие теоремы единственности решения.

Рассмотрим поле, создаваемое зарядом $q=\tau$ (заряженной осью). Заряд находится над поверхностью раздела двух сред, параметры которых ϵ_1 и ϵ_2 (рисунок 2.18, а). Для расчета поля в первой и второй средах воспользуемся методом зеркальных изображений. С этой целью вначале будем считать, что первая и вторая среда заполнены одним диэлектриком ϵ_1 . Влияние диэлектрической проницаемости второй среды учтем введением расчетного заряда $\tau' = q'$, расположенного в месте расположения зеркального изображения заданного заряда τ во второй среде (рисунок 2.18, б). Затем будем считать, что первая и вторая среда заполнены диэлектриком ϵ_2 . Влияние первой среды на вторую учтем введением расчетного заряда τ'' , располагаемого в месте размещения заданного заряда τ (рисунок 2.18, в).

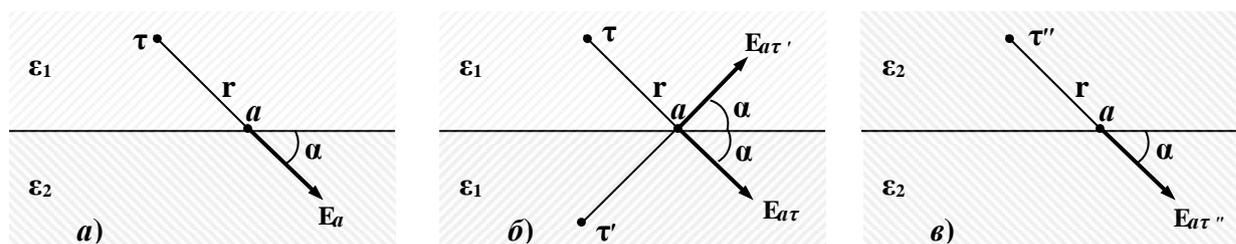


Рисунок 2.18.

Преобразования выполнены для получения уравнений количественной связи расчетных зарядов τ' и τ'' с зарядом и диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 .

По рисунку 2.18, б напряженность поля в точке a будет равна:

$$\mathbf{E}_a = \mathbf{E}_{a\tau} + \mathbf{E}_{a\tau'} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0 r} + \frac{\tau'}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0 r}.$$

По рисунку 2.18, в $\Rightarrow \mathbf{E}_a = \frac{\tau''}{2\pi\epsilon_2\epsilon_0 r}.$

Согласно граничным условиям тангенциальные составляющие напряженности ЭСП на границе раздела двух сред равны, $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$.

По рисункам 2.18, б и в записываем:

$$\frac{\tau}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0 r} \cos \alpha + \frac{\tau'}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0 r} \cos \alpha = \frac{\tau''}{2\pi\epsilon_2\epsilon_0 r} \cos \alpha.$$

Преобразуем уравнение к виду:

$$\frac{\tau}{\epsilon_1} + \frac{\tau'}{\epsilon_1} = \frac{\tau''}{\epsilon_2}. \quad (2.54)$$

Согласно граничным условиям для вектора электростатического смещения, $\mathbf{D}_{n1} = \mathbf{D}_{n2}$. По рисункам 2.18, б и в записываем:

$$\frac{\tau}{2\pi r} \sin \alpha - \frac{\tau'}{2\pi r} \sin \alpha = \frac{\tau''}{2\pi r} \sin \alpha. \Rightarrow \tau - \tau' = \tau''. \quad (2.55)$$

Решая совместно уравнения (2.54) и (2.55) получим:

$$\left. \begin{aligned} \tau' &= \tau \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \\ \tau'' &= \tau \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

Уравнения (2.56) показывают, какую величину расчетного заряда необходимо вводить при определении параметров ЭСП. При этом схема рисунка 2.18, б применяется только для определения параметров ЭСП в среде с ϵ_1 , а схема рисунка 2.18, в – в среде с ϵ_2 .

Если заряд, создающий ЭСП, находится над проводящей поверхностью, то для определения закона изменения параметров \mathbf{D} , \mathbf{E} и $\phi = f(\mathbf{r})$ необходимо в точку зеркального отображения поместить расчетный заряд равный по величине и противоположный по знаку заданному заряду, а вместо проводящей поверхности ввести диэлектрик с заданной ϵ .

