2.17 Уравнения связи между зарядами и потенциалами в системе заряженных тел

Первая группа уравнений Максвелла позволяет определить потенциалы проводов по известным зарядам. Если известны потенциалы проводов, то решая систему уравнений (2.58) относительно зарядов получим (2.59) – вторую группу уравнений Максвелла:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{q_1} &= \boldsymbol{\beta}_{11}\varphi_1 + \boldsymbol{\beta}_{12}\varphi_2 + \boldsymbol{\beta}_{13}\varphi_3 + \boldsymbol{\beta}_{14}\varphi_4; \\ \mathbf{q_2} &= \boldsymbol{\beta}_{21}\varphi_1 + \boldsymbol{\beta}_{22}\varphi_2 + \boldsymbol{\beta}_{23}\varphi_3 + \boldsymbol{\beta}_{24}\varphi_4; \\ \mathbf{q_3} &= \boldsymbol{\beta}_{31}\varphi_1 + \boldsymbol{\beta}_{32}\varphi_2 + \boldsymbol{\beta}_{33}\varphi_3 + \boldsymbol{\beta}_{34}\varphi_4; \\ \mathbf{q_4} &= \boldsymbol{\beta}_{41}\varphi_1 + \boldsymbol{\beta}_{42}\varphi_2 + \boldsymbol{\beta}_{43}\varphi_3 + \boldsymbol{\beta}_{44}\varphi_4. \end{aligned}\right\} \tag{2.59}$$

Здесь: $\boldsymbol{\beta}_{11}$, $\boldsymbol{\beta}_{22}$, $\boldsymbol{\beta}_{33}$, $\boldsymbol{\beta}_{44}$ – собственные емкостные коэффициенты;

$\boldsymbol{\beta}_{12}$, $\boldsymbol{\beta}_{13}$, $\boldsymbol{\beta}_{23}$, $\boldsymbol{\beta}_{34}$ и т. д. – взаимные емкостные коэффициенты.

Размерность емкостных коэффициентов – Фарада. Взаимные емкостные коэффициенты всегда отрицательные, собственные – положительные.

Численные значения $\boldsymbol{\beta}$ находят из первой группы уравнений Максвелла (2.58), как: $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{kn}} = \dfrac{\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{kn}}}{\boldsymbol{\Delta}}$, где Δ- главный определитель системы уравнений (2.58), а $\Delta_{\mathbf{kn}}$ – алгебраическое дополнение, получаемое путем вычеркивания k-ой строки и n – столбца в Δ и умножения на $\mathbf{(-1)^{k+n}}$.

В инженерной практике в системе **n-** заряженных тел, чаще всего заданы не заряды и потенциалы, разность потенциалов, а именно напряжение между проводами и между проводом и землей.

Найдем связь между напряжениями и потенциалами в системе **n** проводов. Для этого преобразуем уравнения (2.59) и получим:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{q_1} &= \mathbf{C}_{11}(\varphi_1 - \varphi_o) + \mathbf{C}_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathbf{C}_{13}(\varphi_1 - \varphi_3) + \mathbf{C}_{14}(\varphi_1 - \varphi_4); \\ \mathbf{q_2} &= \mathbf{C}_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + \mathbf{C}_{22}(\varphi_2 - \varphi_o) + \mathbf{C}_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) + \mathbf{C}_{24}(\varphi_2 - \varphi_4)_4; \\ \mathbf{q_3} &= \mathbf{C}_{31}(\varphi_3 - \varphi_1) + \mathbf{C}_{32}(\varphi_3 - \varphi_2) + \mathbf{C}_{33}(\varphi_3 - \varphi_o) + \mathbf{C}_{34}(\varphi_3 - \varphi_4); \\ \mathbf{q_4} &= \mathbf{C}_{41}(\varphi_4 - \varphi_1) + \mathbf{C}_{42}(\varphi_4 - \varphi_2) + \mathbf{C}_{43}(\varphi_4 - \varphi_3) + \mathbf{C}_{44}(\varphi_4 - \varphi_o). \end{aligned}\right\} \tag{2.60}$$

Уравнения (2.60) есть третья группа уравнений Максвелла.

$\mathbf{C_{11}= \boldsymbol{\beta}_{11}+ \boldsymbol{\beta}_{12}+ \boldsymbol{\beta}_{13}+ \boldsymbol{\beta}_{14}}$ – собственная частичная емкость. $\mathbf{C_{kn}= -\boldsymbol{\beta}_{kn}}$ – взаимная частичная емкость. Частичные емкости всегда положительные. $\boldsymbol{\varphi_o=0}$ – потенциал земли.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{q_1} &= \mathbf{C}_{11}\varphi_1 + \mathbf{C}_{12}U_{12} + \mathbf{C}_{13}U_{13}) + \mathbf{C}_{14}U_{14}; \\ \mathbf{q_2} &= \mathbf{C}_{21}U_{21} + \mathbf{C}_{22}\varphi_2 + \mathbf{C}_{23}U_{23} + \mathbf{C}_{24}U_{24}; \\ \mathbf{q_3} &= \mathbf{C}_{31}U_{31} + \mathbf{C}_{32}U_{32} + \mathbf{C}_{33}\varphi_3 + \mathbf{C}_{34}U_{34}; \\ \mathbf{q_4} &= \mathbf{C}_{41}U_{41} + \mathbf{C}_{42}U_{42} + \mathbf{C}_{43}U_{43} + \mathbf{C}_{44}\varphi_4. \end{aligned}\right\} \tag{2.61}$$

<u>Пример1.</u> Провод с зарядом **+q** расположен над поверхностью земли (рис.2.21, *а*).

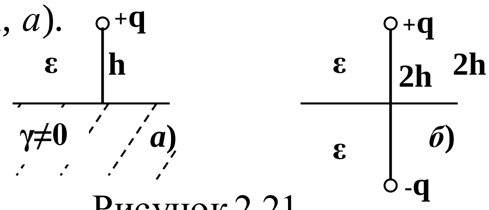

Рисунок 2.21.

Требуется определить потенциал Провода, емкость между проводами и рабочую емкость.

По методу зеркальных изображений заменяем проводящую поверхность средой **ε** и дополнительным зарядом **–q** (рисунок 2.21, *б*). Получим:

$$\varphi = q\frac{\ln\frac{2h}{r_o}}{2\pi\varepsilon\varepsilon_o\ell};\quad C = \frac{q}{\varphi} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_o\ell}{\ln\frac{2h}{r_o}}.$$

<u>Пример 2.</u> Два провода с зарядами $q_1=+q$ и $q_2=-q$ расположены над поверхностью земли. Длина проводов линии **ℓ**, радиус – r_o, расстояние между проводами **d**, высота подвеса проводов h_1 и h_2 (рис.2.22, *а*). Требуется определить рабочую емкость C_p, емкость между проводами C_{12} и емкость проводов относительно земли C_{11}, C_{22}.

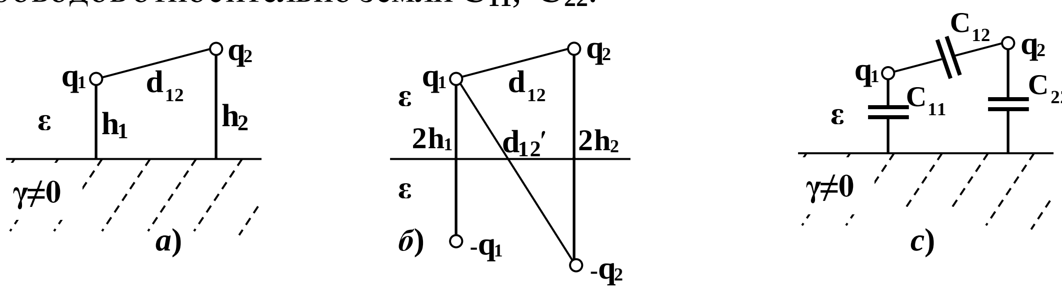

Рисунок 2.22.

По методу зеркальных изображений составляем расчетную схему (рис.2.22, *б*) и составляем систему уравнений в соответствии с первой группой уравнений Максвелла.

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 = \alpha_{11}q - \alpha_{12}q;\\ \varphi_2 &= \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 = \alpha_{21}q - \alpha_{22}q.\end{aligned}\right\}\tag{2.61}$$

Имеем также уравнение $q_1 + q_2 = 0$ – т.е. провода с проводящей поверхностью электрически не связаны.

Напряжение между проводами $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$.

Рабочая емкость $C_{раб}=q/U$ (емкость двухпроводной системы).

Из системы уравнений (2.61) определяем напряжение U_{12} и $C_{раб}$:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = q(\alpha_{11}-\alpha_{12}-\alpha_{21}+\alpha_{22});$$

$$C_{раб}=q/U= \frac{1}{\alpha_{11} - 2\alpha_{21} + \alpha_{22}}.$$

Здесь: $\alpha_{11}= \dfrac{\ln\frac{2h_1}{r_o}}{2\pi\varepsilon\varepsilon_o\ell}$; $\alpha_{12}=\alpha_{21}= \dfrac{\ln\frac{d_{12'}}{d_{12}}}{2\pi\varepsilon\varepsilon_o\ell}$.

Подставив, полученные значения α_{11} и α_{12} окончательно получим:

$$\mathbf{C_{раб}}=\frac{2\pi\pi\varepsilon_o\ell}{\ln\frac{2h_1}{r_o}-2\ln\frac{d_{12'}}{d_{12}}+\ln\frac{2h_2}{r_o}}=\frac{\pi\varepsilon\varepsilon_o\ell}{\ln\frac{2\sqrt{h_1\cdot h_2}\cdot d_{12}}{r_o\cdot d_{12}^{'}}}.$$

$$\mathbf{C_{11}=\beta_{11}+\beta_{12};\ \ C_{22}=\beta_{22}+\beta_{21}.}$$

$$C_{12}=-\beta_{12}=\frac{-\alpha_{21}}{\begin{vmatrix}\alpha_{11}\alpha_{12}\\ \alpha_{21}\alpha_{22}\end{vmatrix}}.$$

При $d_{12} << h_1=h_2$ и $2h\approx d_{12}^{'}$ получим: $\mathbf{C_{раб}}=\dfrac{\pi\varepsilon\varepsilon_o\ell}{\ln\frac{d_{12}}{r_o}}$.

Пример 3. Для двухпроводной линии (рис. 2.22, *а*) заданы следующие величины: d_{12}=2 м; $h_1 = h_2$ = 6 м; r_o= 10 мм; ℓ=16 км; ε=1; $|+q_1|=|-q_2|$; φ_1= 15 кВ; φ_o= 0; φ_2= -15 кВ. Требуется определить частичные и рабочую емкость, величины зарядов q_1, q_2, напряжение U_{12}.

1 Записываем первую группу уравнений Максвелла:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=\alpha_{11}q_1+\alpha_{12}q_2;\\ \varphi_2&=\alpha_{21}q_1+\alpha_{22}q_2\end{aligned}\right\}\qquad (*)$$

$$\alpha_{11}=\alpha_{22}=\frac{\ln\frac{2h}{r_o}}{2\pi\varepsilon\varepsilon_o\ell}=\frac{\ln\frac{2\cdot 6}{0{,}01}}{2\cdot 3{,}14\cdot 1\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 16\cdot 10^3}=0{,}8\cdot 10^7\ {}^1\!/\!_Ф;$$

$$\alpha_{12}=\alpha_{21}=\frac{\ln\frac{d_{12'}}{d_{12}}}{2\pi\varepsilon\varepsilon_o\ell}=\frac{\ln\frac{\sqrt{6^2+2^2}}{2}}{2\cdot 3{,}14\cdot 1\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 16\cdot 10^3}=0{,}13\cdot 10^7\ {}^1\!/\!_Ф.$$

2 Определяем емкостные коэффициенты из второй группы уравнений Максвелла:

$$\left.\begin{aligned}q_1&=\beta_{11}\varphi_1+\beta_{12}\varphi_2;\\ q_2&=\beta_{21}\varphi_1+\beta_{22}\varphi_2;\end{aligned}\right\}$$

$$\beta_{11}=\beta_{22}=\frac{\alpha_{22}(-1)^{1+1}}{\begin{vmatrix}\alpha_{11}\alpha_{12}\\ \alpha_{11}\alpha_{12}\end{vmatrix}}=\frac{0{,}8\cdot 10^7}{\begin{vmatrix}0{,}8\cdot 10^7 & 0{,}13\cdot 10^7\\ 0{,}13\cdot 10^7 & 0{,}8\cdot 10^7\end{vmatrix}}=1{,}28\cdot 10^{-7}\,Ф;$$

$$\beta_{12}=\beta_{21}=\frac{\alpha_{21}(-1)^{1+2}}{\begin{vmatrix}\alpha_{11}\alpha_{12}\\ \alpha_{11}\alpha_{12}\end{vmatrix}}=\frac{-0{,}13\cdot 10^7}{\begin{vmatrix}0{,}8\cdot 10^7 & 0{,}13\cdot 10^7\\ 0{,}13\cdot 10^7 & 0{,}8\cdot 10^7\end{vmatrix}}=-0{,}209\cdot 10^{-7}\,Ф.$$

3 **φ_1=15 кВ, φ_1=-15 кВ**; **$U_{12}=\varphi_1-\varphi_2$=15-(-15) = 30** кВ.

4 Из уравнений п.2 определяем величины зарядов:

$$q_1=1{,}28\cdot 10^{-7}\cdot 15\cdot 10^3+(-0{,}209\cdot 10^{-7})\cdot 15\cdot 10^3)=22{,}35\cdot 10^{-4}\,Кл=2235\ мкКл.$$

$\mathbf{q_2=q_1=-2235}$ мкКл.

5 $\mathbf{C_{раб}}=\dfrac{\mathbf{q}}{\mathbf{U_{12}}}=\dfrac{\mathbf{2235\cdot 10^{-6}}}{\mathbf{30\cdot 10^{3}}}=\mathbf{74{,}5\cdot 10^{-9}\,Ф}=\mathbf{74{,}5}$ пФ .

6 По (рис. 2.22, *с*) => $\mathbf{C_{раб}=C_{12}}+\dfrac{\mathbf{C_{11}\cdot C_{22}}}{\mathbf{C_{11}+C_{22}}}$.

$\mathbf{C_{11}=\beta_{11}+\beta_{12}=1{,}28\cdot 10^{-7}-0{,}209\cdot 10^{-7}=1{,}07\cdot 10^{-7}}$ Ф.

$\mathbf{C_{12}=-\beta_{12}=-(-0{,}209\cdot 10^{-7})=0{,}209\cdot 10^{-7}}$ Ф.