1.4 Теорема Гаусса и постулат Максвелла в дифференциальной форме

Теорема гласит: поток вектора напряжённости электрического поля **E** сквозь замкнутую поверхность **S** в однородной и изотропной среде равен отношению электрического заряда, заключенного в объёме пространства, ограниченном поверхностью **S**, к абсолютной диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon\varepsilon_0$, т.е:

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\mathbf{q}}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (1.14)$$

или

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \mathbf{q} \qquad (1.15)$$

Эти интегралы являются количественной мерой электрического заряда, заключённого внутри объёма, ограниченного замкнутой поверхностью **S**. Закон распределения электрического заряда внутри объёма можно определить по теореме Гаусса, записанной в дифференциальной форме.

Допустим требуется выяснить имеется ли электрический заряд в малом объёме $\Delta\mathbf{V}$, заключающем в себе точку **A** и какова его плотность **ρ**.

Разделим (1.14) на $\Delta\mathbf{V}$, взяв предел при $\Delta V \to 0$, получим

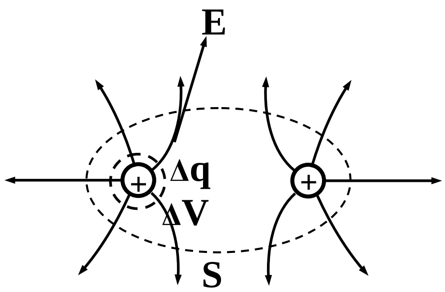

Рисунок 1.2.

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}}{\Delta \mathbf{V}} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta \mathbf{q}}{\Delta \mathbf{V}\cdot\varepsilon\varepsilon_0}\ . \qquad (1.16)$$

$$\mathbf{div\ E} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\varepsilon\varepsilon_0}\ .$$

Получим следующие выражения (1.14) и (1.15) в дифференциальной форме

$$\mathbf{div\ E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}\ . \qquad (1.17)$$

$$\mathbf{div\ D} = \rho\ . \qquad (1.18)$$

(1.17) - теорема Гаусса, (1.18) – постулат Максвелла в дифференциальной форме.

Физический смысл постулата – поток вектора электрического смещения **D** сквозь замкнутую поверхность **S** в любой среде равен объемной плотности **ρ** свободного электрического заряда, заключенного в объеме, ограниченном замкнутой поверхностью.

Дивергенция (расхождение) вектора **A** – есть предел отношения потока этого вектора сквозь замкнутую поверхность к величине объёма $\Delta\mathbf{V}$, заключённого внутри замкнутой поверхности **S** при устремлении $\Delta\mathbf{V}$ к нулю.

Положительный заряд $\mathbf{q}_+$ можно рассматривать как источник силовых линий напряжённости электрического поля **E**, около него начинаются эти линии. Отрицательный заряд $\mathbf{q}_-$ является как бы стоком, около него силовые линии напряжённости заканчиваются. Поэтому, если в некотором объёме $\Delta\mathbf{V}$ объёмная плотность электрического заряда **ρ** не равна нулю, то через замкнутую поверхность всегда силовые линии сходятся или расходятся в окружающее пространство, где расхождение вектора $\mathbf{divE \neq 0}$.

Если в объёме заряды отсутствуют, то и силовые линии напряжённости **E** электрического поля не сходятся в объёме и не расходятся из него, а лишь пересекают объём, что следует из рисунка 1.3.

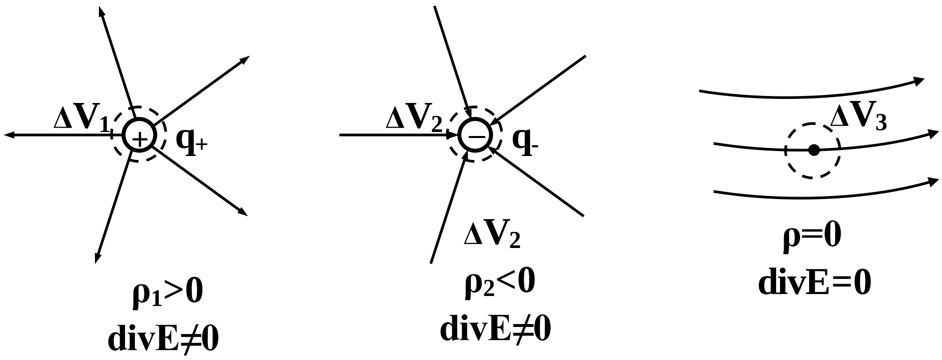

Рисунок 1.3.

Для трех элементарных объемов получим следующие значения

$$\mathbf{dV_1}\qquad \mathbf{divE}=\frac{\rho_1}{\varepsilon\varepsilon_0}\qquad \mathbf{divD=\rho}\qquad \mathbf{+q_1>0}$$

$$\mathbf{dV_2}\qquad \mathbf{divE}=-\frac{\rho_2}{\varepsilon\varepsilon_0}\qquad \mathbf{divD=-\rho}\qquad \mathbf{-q_1<0}$$

$$\mathbf{dV_3}\qquad \mathbf{divE=0}\qquad \mathbf{divD=0}\qquad \mathbf{q=0}$$

Выражения (1.16) и (1.17) можно выразить, используя оператор Гамильтона (набла). $\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}$

Тогда получим: $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{E}=\frac{\rho_1}{\varepsilon\varepsilon_0}; \qquad \boldsymbol{\nabla}\mathbf{D=\rho}.$ (1.19)

Под оператором $\boldsymbol{\nabla}$ понимают сумму частных производных по трём координатным осям, умноженных на соответствующие единичные векторы (орты). Формально это вектор и применяется к скалярным и векторным функциям.