2 Электростатическое поле

2.1 Основные уравнения электростатического поля в дифференциальной форме

Электростатическим называют поле неподвижных относительно наблюдателя зарядов, неизменных во времени.

Если в рассматриваемой среде нет намагниченных тел и свободных зарядов (они порождают электрический ток), то в системе уравнений (1.8) останутся 3 уравнения:

$$\mathbf{rot\ E = 0}; \qquad \mathbf{D = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot E}; \qquad \mathbf{div\ D = \rho}. \tag{2.1}$$

Первое уравнение (2.1) $\mathbf{rot\,E = 0}$ свидетельствует о том, что электростатическое поле безвихревое, оно потенциальное.

Для любого замкнутого контура по теореме Стокса получим

$$\oint_{\ell} \mathbf{E} \cdot \partial\ell = \int_{\mathbf{S}} \mathbf{rot\ E \cdot dS = 0} \tag{2.2}$$

В электростатическом поле линейный интеграл вектора **E** вдоль замкнутого контура равен нулю. Это значит, что падение напряжения ($\mathbf{E} \cdot \ell$) между двумя точками в электростатическом поле определяется не выбором пути интегрирования, а местом расположения этих точек.

Это обстоятельство дало возможность ввести понятие потенциал электростатического поля.

Потенциал электростатического поля в любой точке определяется как работа, совершаемая силами электростатического поля по перемещению единичного положительного заряда из данной точки поля в точку поля, в которой потенциал равен нулю.

$$\varphi_{\mathbf{A}} = \int_{\mathbf{A}}^{\infty} \overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{d}\ell}. \tag{2.3}$$

$\overline{\mathrm{E}} \cdot \overline{\mathrm{d}\ell}$ - есть скалярное произведение векторов.

Поясним на примере.

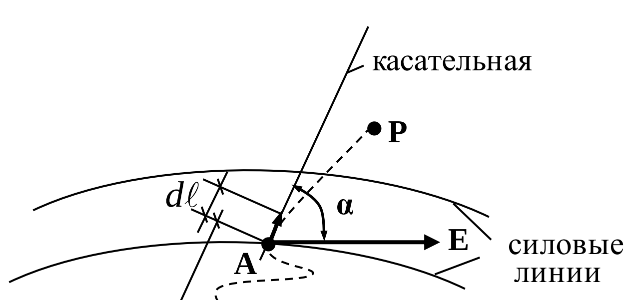
Определим потенциал точки **A** (рисунок 2.1), расположение которой известно относительно начала координат.

$$\varphi_{\mathbf{A}} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{P}} \overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{d}\ell} = \int_{\ell}^{\infty} \overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{d}\ell} = \int_{\ell}^{\infty} \mathbf{E}\cos\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{d}\ell \tag{2.4}$$

dℓ - вектор, элемент длины, направленный по касательной к пути перемещения. Продифференцировав обе части формулы (2.4) по **dℓ** (нижнему пределу) получим:

$$\frac{\partial\varphi_{\mathbf{A}}}{\partial\ell} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{cos}\boldsymbol{\alpha} \cdot \tag{2.5}$$

Проанализируем уравнение (2.5). Если угол $\alpha = 90^{o}$, то $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\ell} = 0$, т.к. $\cos\alpha = 0$.



Следовательно, перемещаясь в направлении, перпендикулярном направлению силовых линий потенциал не изменяется, φ = const. Таким образом, силовые линии напряженности электростатического

Рисунок 2.1 $$\mathbf{d}\varphi / \mathbf{d}\ell = -\mathbf{E}\,.$$

В направлении перемещения нормальном к поверхности равного потенциала $\partial\varphi/\partial\ell$ имеет наибольшее значение и его можно выразить вектором, называемом градиентом потенциала.

Градиент потенциала равен приращению потенциала, отнесенному к единице длины и взятому в направлении, в котором это приращение имеет наибольшее значение (по кратчайшему пути между рассматриваемыми точками). Записывается так

$$\overrightarrow{n^{o}}\frac{\partial\varphi}{\partial\ell} = -\bar{\mathbf{E}}. \quad \text{Или} \quad \mathbf{grad}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{-E}. \tag{2.6}$$

Знак минус указывает, что потенциал убывает в направлении вектора **E**.

В прямоугольной системе координат (2.4) имеет вид $\nabla\varphi = -E$. Если выразить через проекции на координатные оси

$$\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{y}} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{z}} = -\mathbf{E} \;\Rightarrow\; i\varphi_x + j\varphi_y + k\varphi_z = -iE_x - jE_y - kE_z.$$